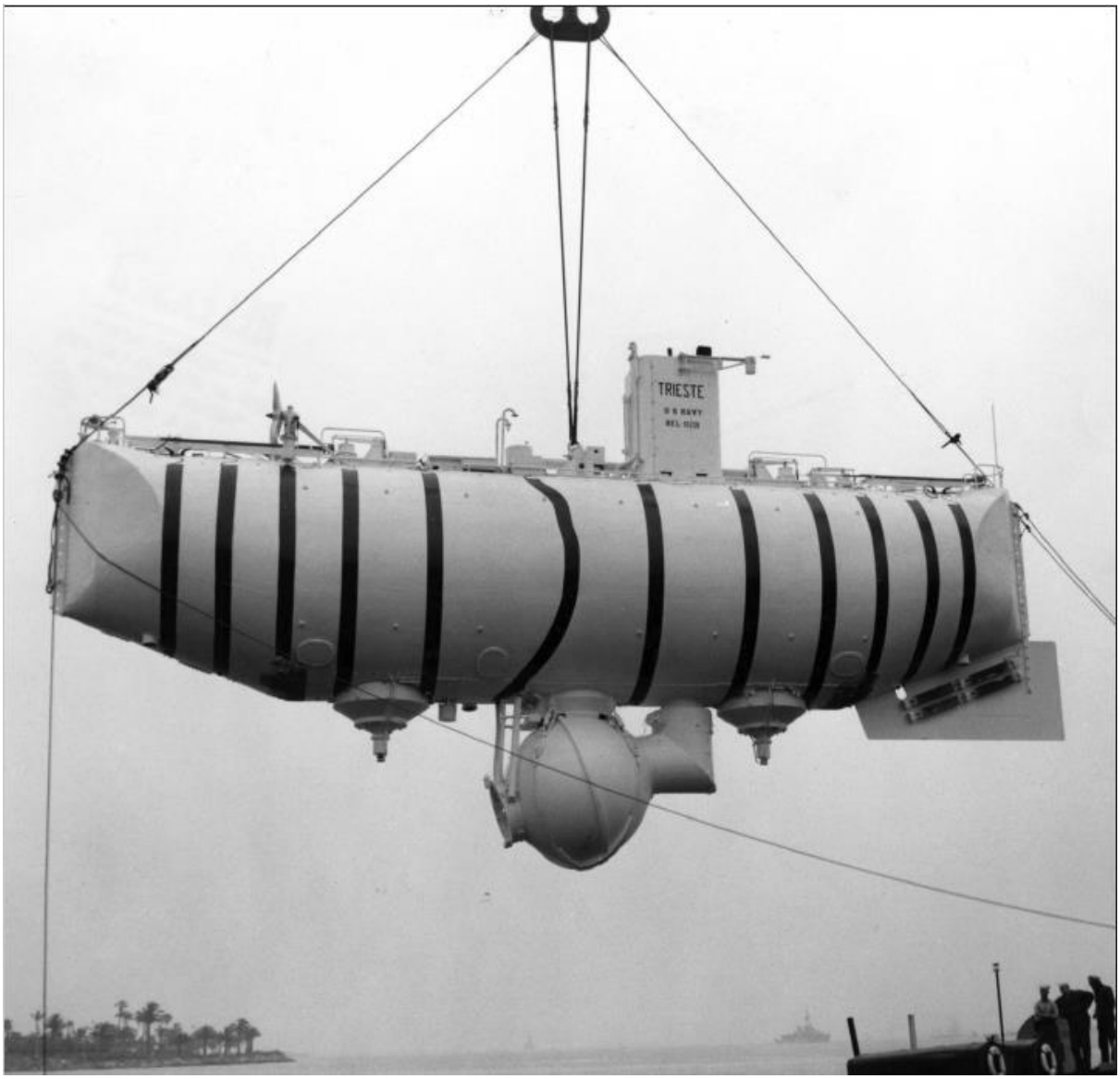


باتیسکاف تریسته توسط کاوشگرانی به نام‌های آگوست و ژاک پیکارد در سال ۱۹۵۳ ساخته شد. آن‌ها در طول پنج سال بعدی غواصی‌های زیادی در اعماق دریا انجام دادند. در سال ۱۹۵۸ نیروی دریایی ایالات متحده آن را خریداری کرد و در سال ۱۹۶۰ به عمیق‌ترین قسمت اقیانوس، گودال ماریانا، در نزدیکی گوام، رسید. عمق ثبت شده ۱۰۹۰۰ متر یا تقریباً هفت مایل بود. عکس، کشتی را در حال بلند شدن از آب نشان می‌دهد. کره فشار در پایین قرار دارد و ساختار قایق‌شکل بالا با بنزین پر شده است که حتی در آن اعماق نیز خاصیت شناوری ایجاد می‌کند. [تصویر با اجازه نیروی دریایی ایالات متحده.]

فصل اول توزیع فشار داخل سیال

انگیزه. بسیاری از مسائل سیالات شامل حرکت نمی‌شوند. آنها به توزیع فشار در یک سیال ساکن و تأثیر آن بر سطوح جامد و اجسام شناور و غوطه‌ور مربوط می‌شوند.

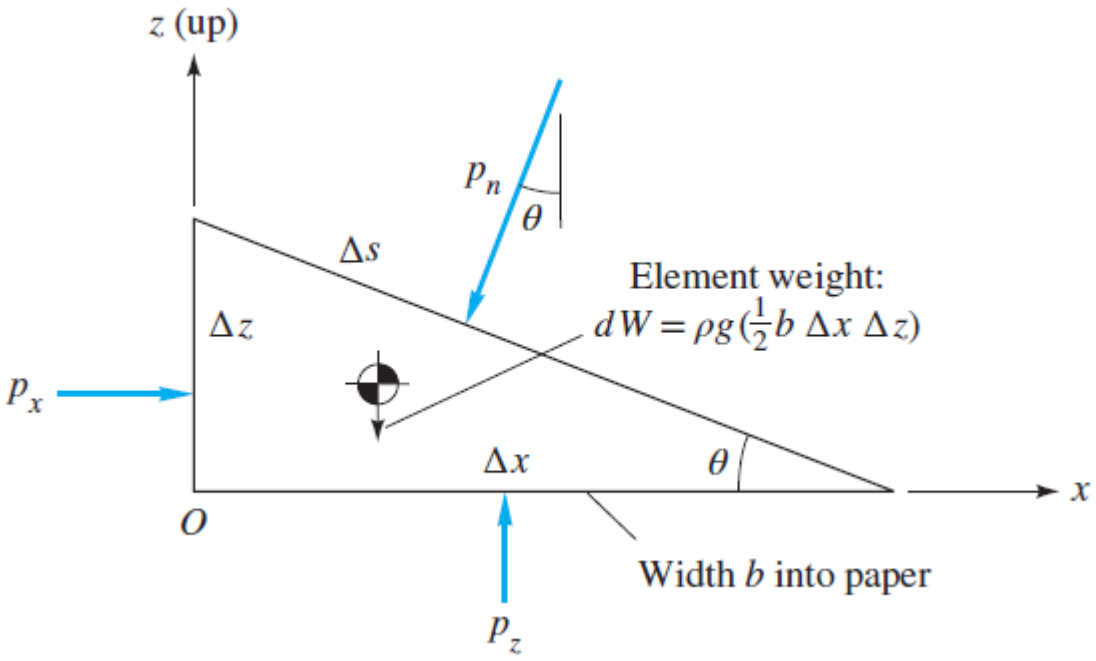
هنگامی که سرعت سیال صفر است، که به عنوان شرایط هیدرواستاتیک نشان داده می‌شود، تغییر فشار فقط به دلیل وزن سیال است. با فرض یک سیال شناخته شده در یک میدان گرانشی معین، فشار را می‌توان به راحتی با انتگرال‌گیری محاسبه کرد. کاربردهای مهم در این فصل عبارتند از (۱) توزیع فشار در جو و اقیانوس‌ها، (۲) طراحی ابزارهای فشار سنج، مکانیکی و الکترونیکی، (۳) نیروهای وارد بر سطوح صاف و منحنی غوطه‌ور، (۴) شناوری بر روی یک جسم غوطه‌ور و (۵) رفتار اجسام شناور. دو مورد آخر منجر به اصول ارشمیدس می‌شوند.

اگر سیال در حال حرکت به صورت جسم صلب باشد، مانند یک مخزن مایع که مدت زیادی در حال چرخش بوده است، فشار را نیز می‌توان به راحتی محاسبه کرد زیرا سیال عاری از تنش برشی است. ما این ایده را در اینجا برای شتاب‌های ساده جسم صلب در بخش ۲.۹ اعمال می‌کنیم. ابزارهای اندازه‌گیری فشار در بخش ۲.۱۰ مورد بحث قرار گرفته‌اند. در واقع، فشار را می‌توان در حرکات دلخواه (جسم غیر صلب) $V(x, y, z, t)$ نیز تجزیه و تحلیل کرد، اما این موضوع را به فصل ۴ موکول می‌کنیم.

۲.۱ فشار و گرادیان فشار

در شکل ۱.۱ دیدیم که یک سیال در حالت سکون نمی‌تواند تنش برشی را تحمل کند و بنابراین دایره مور به یک نقطه کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر، تنش عمودی روی هر صفحه از میان یک المان سیال در حالت سکون، یک ویژگی نقطه‌ای به نام فشار سیال p است که طبق قرارداد رایج برای فشرده‌سازی مثبت در نظر گرفته می‌شود. این مفهوم آنقدر مهم است که آن را با رویکرد دیگری بررسی خواهیم کرد.

ابتدا اجازه دهید تأکید کنیم که فشار یک ویژگی ترمودینامیکی سیال است، مانند دما یا چگالی. نیرو نیست. فشار جهت ندارد و بردار نیست. مفهوم نیرو فقط زمانی مطرح می‌شود که سطحی را در نظر بگیریم که در فشار سیال غوطه‌ور است. فشار به دلیل بمباران سطح توسط مولکول‌های سیال، نیرویی ایجاد می‌کند و بر آن سطح عمود است.



شکل ۲.۱ تعادل یک تکه کوچک از سیال در حالت سکون.

شکل ۲.۱ یک گوه کوچک از سیال را در حالت سکون با اندازه Δx در Δz در Δs و عمق b در کاغذ نشان می‌دهد. طبق تعریف، هیچ نیروی برشی وجود ندارد، اما فرض می‌کنیم که فشارهای px، pz و pn ممکن است در هر وجه متفاوت باشند. وزن المان نیز ممکن است مهم باشد. فرض می‌شود که المان کوچک است، بنابراین فشار در هر وجه ثابت است. مجموع نیروها باید در هر دو جهت x و z برابر با صفر (بدون شتاب) باشد.

$$\sum F_x = 0 = p_x b\ \Delta z - p_n b\ \Delta s \sin\theta$$

$$\sum F_z = 0 = p_z b\ \Delta x - p_n b\ \Delta s \cos\theta - \tfrac{1}{2}\rho g b\ \Delta x\ \Delta z \qquad (2.1)$$

اما هندسه گوه به گونه‌ای است که

$$\Delta s \sin\theta = \Delta z \qquad \Delta s \cos\theta = \Delta x$$

با جایگذاری در معادله (۲.۱) و بازآرایی، داریم:

$$p_x = p_n \qquad p_z = p_n + \tfrac{1}{2}\rho g\ \Delta z$$

این روابط دو اصل مهم از شرایط هیدرواستاتیک یا بدون برش را نشان می‌دهند: (۱) هیچ تغییر فشاری در جهت افقی وجود ندارد، و (۲) یک تغییر عمودی در فشار متناسب با چگالی، گرانش و تغییر عمق وجود دارد. ما از این نتایج به طور کامل، با شروع از بخش ۲.۳، بهره‌برداری خواهیم کرد.

در حدی که گوه سیال به یک "نقطه" کوچک می‌شود، $\Delta z \to 0$ و معادله (۲.۳) به صورت زیر در می‌آیند:

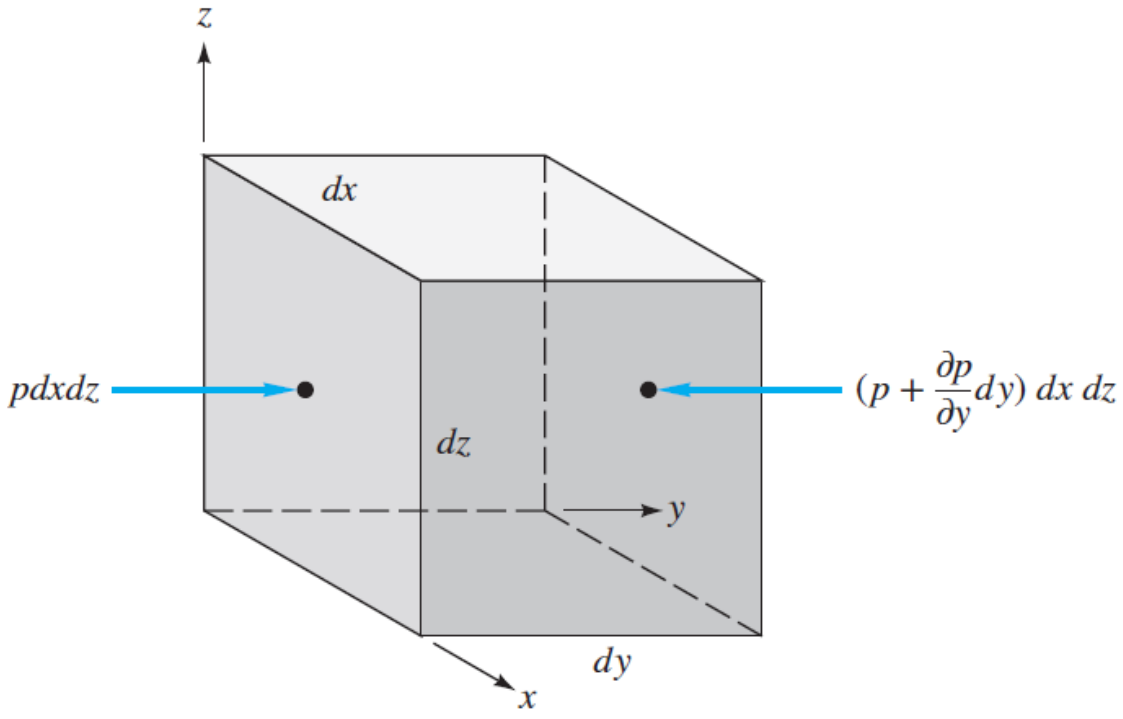
$$p_x = p_z = p_n = p \qquad (2.4)$$

از آنجایی که θ دلخواه است، نتیجه می‌گیریم که فشار p در یک سیال ساکن، یک ویژگی نقطه‌ای است که مستقل از جهت‌گیری می‌باشد.

نیروی فشاری وارد بر یک المان سیال

فشار (یا هر تنش دیگری، در این مورد) باعث ایجاد نیروی خالصی بر روی یک المان سیال می‌شود. برای مشاهده این موضوع، فشار وارد بر دو وجه x در شکل ۲.۲ را در نظر بگیرید. فرض کنید فشار به طور دلخواه تغییر کند.

$$p = p(x, y, z, t)$$



شکل ۲.۲ نیروی خالص y وارد بر یک المان ناشی از تغییر فشار.

نیروی خالص در جهت y بر روی عنصر در شکل ۲.۲ توسط داده شده است.

$$dF_y = p\,dx\,dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)dx\,dz = -\frac{\partial p}{\partial y}dx\,dy\,dz$$

به همین ترتیب، نیروی خالص dFx شامل $-\partial p/\partial x$ و نیروی خالص dFz مربوط به $-\partial p/\partial z$ است. بردار نیروی خالص کل وارد بر المان ناشی از فشار عبارت است از:

$$d\mathbf{F}_{\text{press}} = \left(-\mathbf{i}\frac{\partial p}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial p}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz \qquad (2.5)$$

ما عبارت داخل پرانتز را به عنوان گرادیان برداری منفی p در نظر می‌گیریم. با نشان دادن f به عنوان نیروی خالص بر واحد حجم المان، معادله (۲.۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\mathbf{f}_{\text{press}} = -\nabla p \qquad (2.6)$$

where $$\nabla = \text{gradient operator} = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

بنابراین، این فشار نیست که باعث ایجاد نیروی خالص می‌شود، بلکه گرادیان فشار است که باید توسط گرانش یا شتاب یا برخی عوامل دیگر در سیال متعادل شود.

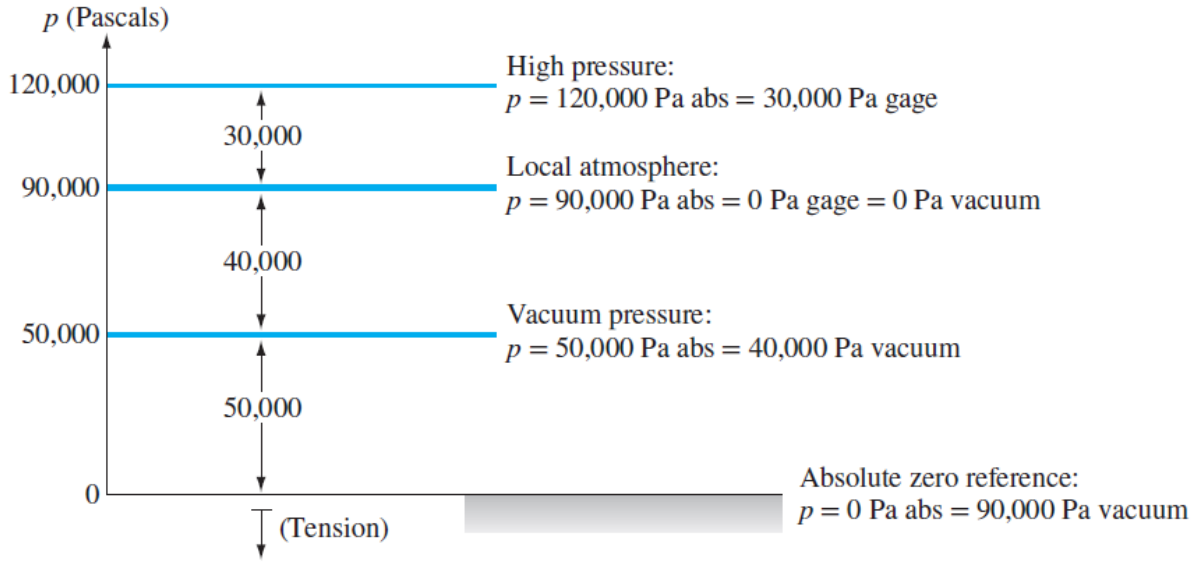
۲.۲ تعادل یک المان سیال

گرادیان فشار یک نیروی سطحی است که بر وجوه المان وارد می‌شود. همچنین ممکن است یک نیروی حجمی، به دلیل پتانسیل‌های الکترومغناطیسی یا گرانشی، بر کل جرم المان وارد شود. در اینجا ما فقط نیروی گرانش یا وزن المان را در نظر می‌گیریم:

$$d\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho\mathbf{g}\,dx\,dy\,dz$$
$$\text{or} \qquad \mathbf{f}_{\text{grav}} = \rho\mathbf{g} \qquad (2.7)$$

علاوه بر گرانش، یک سیال در حال حرکت، نیروهای سطحی ناشی از تنش‌های ویسکوز را نیز خواهد داشت که به آنها تنش‌های برشی نیز گفته می‌شود. طبق قانون نیوتن، معادله (۱.۲)، مجموع این نیروهای بر واحد حجم برابر است با جرم بر واحد حجم (چگالی) ضربدر شتاب a المان سیال:

$$\sum\mathbf{f} = \mathbf{f}_{\text{press}} + \mathbf{f}_{\text{grav}} + \mathbf{f}_{\text{visc}} = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \mathbf{f}_{\text{visc}} = \rho\mathbf{a} \qquad (2.8)$$



شکل ۲.۳ نمایش مقادیر فشار مطلق، گیج و خلاء.

این معادله کلی در فصل ۴ به تفصیل مورد بررسی قرار خواهد گرفت. توجه داشته باشید که معادله (۲.۸) یک رابطه برداری است و شتاب ممکن است در همان جهت برداری سرعت نباشد. برای موضوع فعلی ما، هیدرواستاتیک، تنش‌های ویسکوز و شتاب صفر هستند.

فشار گیج و فشار خلاء: اصطلاحات نسبی

قبل از شروع مثال‌ها، باید توجه داشته باشیم که مهندسان معمولاً فشارها را به صورت (۱) مقدار مطلق یا کل یا (۲) مقدار نسبت به جو محیط محلی مشخص می‌کنند. مورد دوم به این دلیل رخ می‌دهد که بسیاری از ابزارهای فشار از نوع دیفرانسیلی هستند و نه مقدار مطلق، بلکه اختلاف بین فشار سیال و جو را ثبت می‌کنند. فشار اندازه‌گیری شده ممکن است بالاتر یا پایین‌تر از جو محلی باشد و به هر مورد نامی داده می‌شود:

$$1.\quad p > p_a \quad \textit{Gage} \text{ pressure:} \qquad p(\text{gage}) = p - p_a$$
$$2.\quad p < p_a \quad \textit{Vacuum} \text{ pressure:} \qquad p(\text{vacuum}) = p_a - p$$

این یک روش خلاصه‌سازی مناسب است و بعداً می‌توان فشار اتمسفر را برای تعیین فشار مطلق سیال اضافه (یا کم) کرد.

یک وضعیت معمول در شکل ۲.۳ نشان داده شده است. جو محلی مثلاً ۹۰۰۰۰ پاسکال است که ممکن است منعکس کننده شرایط طوفانی در مکانی در سطح دریا یا شرایط عادی در ارتفاع ۱۰۰۰ متری باشد. بنابراین، در این روز، pa = 90000 پاسکال مطلق = ۰ پاسکال خلاء. فرض کنید گیج ۱ در آزمایشگاه p1 = 120000 پاسکال مطلق را نشان می‌دهد. این مقدار را می‌توان به عنوان فشار گیج گزارش کرد، p1 = 120000 − 90000 = 30000 پاسکال گیج. (همچنین باید فشار اتمسفر را در آزمایشگاه ثبت کرد، زیرا pa به تدریج تغییر می‌کند.) فرض کنید گیج ۲ p2 = 50000 پاسکال مطلق را نشان می‌دهد. در محل، این فشار، فشار خلأ است و ممکن است به صورت p2 = 90,000 − 50,000 = 40,000 پاسکال خلأ گزارش شود. گاهی اوقات، در بخش مسائل، فشار گیج یا خلأ را مشخص می‌کنیم تا شما را نسبت به این روش مهندسی رایج آگاه نگه داریم. اگر فشاری بدون اصلاح‌کننده گیج یا خلأ ذکر شده باشد، فرض می‌کنیم که فشار مطلق است.

۲.۳ توزیع فشار هیدرواستاتیک

اگر سیال در حالت سکون یا با سرعت ثابت باشد، a = 0 و fvisc = 0. معادله (۲.۸) برای توزیع فشار به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\nabla p = \rho \mathbf{g} \qquad (2.9)$$

این یک توزیع هیدرواستاتیک است و برای همه سیالات در حالت سکون، صرف نظر از ویسکوزیته آنها، صحیح است، زیرا عبارت ویسکوزیته به طور یکسان صفر می‌شود.

از تحلیل برداری به یاد بیاورید که بردار ∇ p مقدار و جهت حداکثر نرخ مکانی افزایش خاصیت اسکالر p را بیان می‌کند. در نتیجه، ∇ p در همه جا بر سطوح با p ثابت عمود است. بنابراین معادله (۲.۹) بیان می‌کند که یک سیال در تعادل هیدرواستاتیک، سطوح فشار ثابت خود را در همه جا عمود بر بردار گرانش موضعی همسو می‌کند. حداکثر افزایش فشار در جهت گرانش خواهد بود - یعنی "پایین" در جهت z منفی. اگر سیال مایع باشد، سطح آزاد آن، که در فشار اتمسفر است، عمود بر گرانش موضعی یا "افقی" خواهد بود. احتمالاً همه اینها را قبلاً می‌دانستید، اما معادله (۲.۹) اثبات آن است.

بردار گرانش موضعی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

$$\mathbf{g} = -g\mathbf{k} \qquad (2.10)$$

که در آن g بزرگی گرانش محلی است، برای مثال، ۹.۸۰۷ متر بر مجذور ثانیه. برای این مختصات، معادله (۲.۹) دارای مؤلفه‌های زیر است:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -\gamma \tag{2.11}$$

که دو مورد اول به ما می‌گویند p مستقل از x و y است. از این رو ∂p/∂z را می‌توان با مشتق کل dp/dz جایگزین کرد و شرط هیدرواستاتیک به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma$$

or

$$p_2 - p_1 = -\int_1^2 \gamma \, dz \tag{2.12}$$

معادله (۲.۱۲) راه حل مسئله هیدرواستاتیک است. انتگرال‌گیری نیاز به فرضی در مورد چگالی و توزیع گرانش دارد. گازها و مایعات معمولاً به طور متفاوتی در نظر گرفته می‌شوند.

ما نتایج زیر را در مورد شرایط هیدرواستاتیک بیان می‌کنیم:

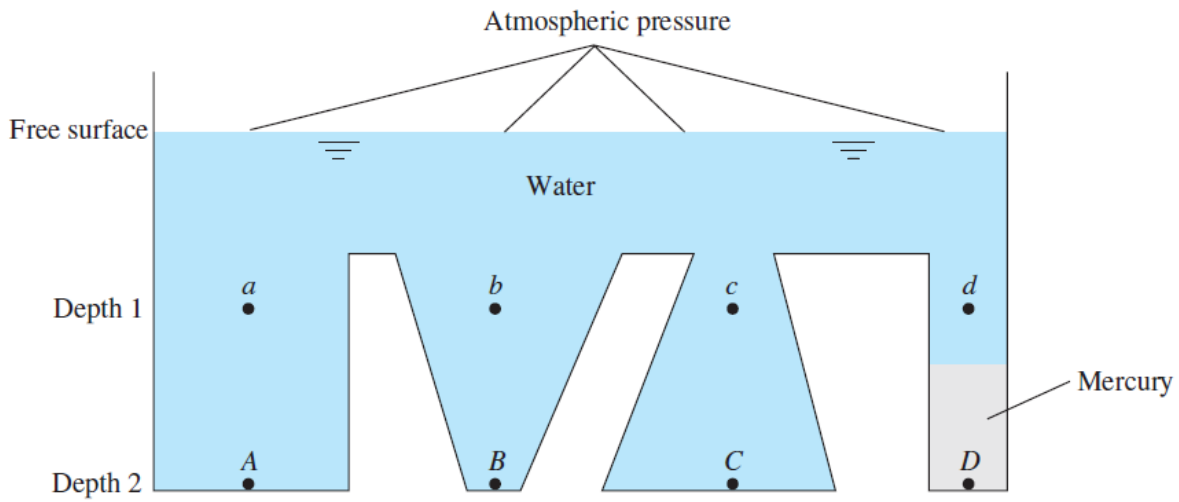
فشار در یک سیال استاتیک یکنواخت با توزیع پیوسته، تنها با فاصله عمودی تغییر می‌کند و مستقل از شکل ظرف است. فشار در تمام نقاط روی یک صفحه افقی مشخص در سیال یکسان است. فشار با عمق سیال افزایش می‌یابد.

تصویری از این در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. سطح آزاد ظرف اتمسفری است و یک صفحه افقی را تشکیل می‌دهد. نقاط a، b، c و d در عمق یکسانی در یک صفحه افقی قرار دارند و توسط یک سیال، آب، به هم متصل شده‌اند. بنابراین، همه نقاط فشار یکسانی دارند. همین امر در مورد نقاط A، B و C در پایین نیز صادق است که همگی فشار بالاتری نسبت به نقاط a، b، c و d دارند. با این حال، نقطه D، اگرچه در همان عمق A، B و C قرار دارد، اما فشار متفاوتی دارد، زیرا زیر سیال متفاوتی، یعنی جیوه، قرار دارد.

اثر گرانش متغیر

برای یک سیاره کروی با چگالی یکنواخت، شتاب گرانش با عکس مجذور شعاع از مرکز آن تغییر می‌کند.

$$g = g_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \tag{2.13}$$



شکل ۲.۴ توزیع فشار هیدرواستاتیک. نقاط a، b، c و d در عمق‌های مساوی در آب قرار دارند و بنابراین فشارهای یکسانی دارند. نقاط A، B و C نیز در عمق‌های مساوی در آب قرار دارند و فشارهای یکسانی بالاتر از a، b، c و d دارند. نقطه D فشاری متفاوت از A، B و C دارد زیرا توسط مسیر آبی به آنها متصل نیست.

که در آن r0 شعاع سیاره و g0 مقدار سطحی g است. برای زمین، mi r0 ≈ 3960 قانونی≈ 6400 کیلومتر است. در مسائل مهندسی معمول، انحراف از r0 از عمیق‌ترین اقیانوس، حدود ۱۱ کیلومتر، تا ارتفاع جوی عملیات حمل و نقل مافوق صوت، حدود ۲۰ کیلومتر، امتداد دارد. این حداکثر تغییر در g برابر با (۶۴۲۰/۶۴۰۰)^{۲} یا ۰.۶ درصد است. بنابراین، ما در اکثر مسائل از تغییر g صرف نظر می‌کنیم.

فشار هیدرواستاتیک در مایعات

مایعات تقریباً تراکم‌ناپذیر هستند، به طوری که می‌توانیم از تغییرات چگالی آنها در هیدرواستاتیک صرف نظر کنیم. در مثال ۱.۶ دیدیم که چگالی آب در عمیق‌ترین قسمت اقیانوس تنها ۴.۶ درصد افزایش می‌یابد. تأثیر آن بر هیدرواستاتیک حدود نیمی از این مقدار یا ۲.۳ درصد خواهد بود. بنابراین، چگالی ثابت را در محاسبات هیدرواستاتیک مایع فرض می‌کنیم، که برای آن معادله (۲.۱۲) به صورت زیر انتگرال می‌گیرد.

Liquids: $$p_2 - p_1 = -\gamma (z_2 - z_1) \qquad (2.14)$$

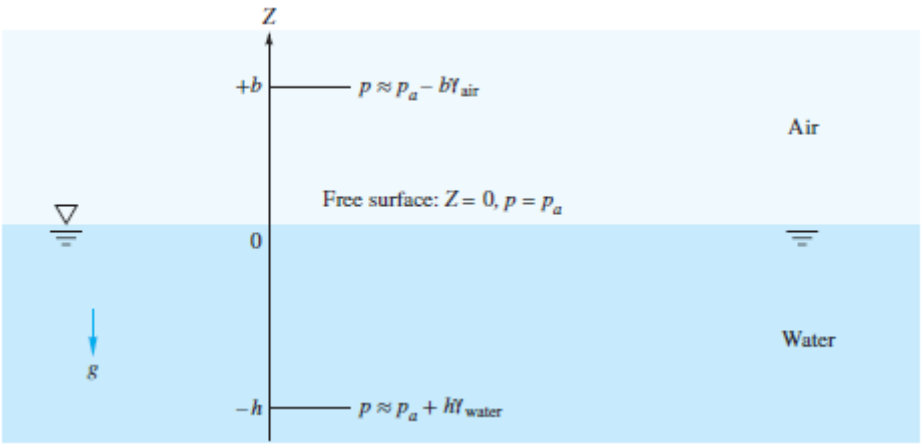
or $$z_1 - z_2 = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}$$

در بیشتر مسائل، از شکل نخست استفاده می‌کنیم. کمیت γ «وزن مخصوص» سیال نامیده می‌شود و دارای بُعد وزن بر واحد حجم است؛ برخی از مقادیر آن در جدول ۲.۱ آمده است. کمیت p/γ دارای بُعد طول است و «ارتفاع فشار» سیال نامیده می‌شود.

جدول ۲.۱ وزن مخصوص برخی از سیالات رایج

Fluid	Specific weight γ at 68°F = 20°C lbf/ft³	N/m³
Air (at 1 atm)	0.0752	11.8
Ethyl alcohol	49.2	7,733
SAE 30 oil	55.5	8,720
Water	62.4	9,790
Seawater	64.0	10,050
Glycerin	78.7	12,360
Carbon tetrachloride	99.1	15,570
Mercury	846	133,100

شکل ۲.۵ توزیع فشار هیدرواستاتیک در اقیانوس‌ها و جوها.



برای دریاچه‌ها و اقیانوس‌ها، سیستم مختصات معمولاً مطابق شکل ۲.۵ انتخاب می‌شود، با z = 0 در سطح آزاد، که در آن p برابر با فشار اتمسفر سطح است. وقتی مقدار مرجع (p1, z1) = (pa, 0) را معرفی می‌کنیم، معادله (۲.۱۴) برای p در هر عمق (منفی) z به صورت زیر می‌شود:

$$\text{Lakes and oceans:} \qquad p = p_a - \gamma z \qquad (2.15)$$

که در آن γ وزن مخصوص متوسط دریاچه یا اقیانوس است. همان‌طور که خواهیم دید، معادله (۲.۱۵) در مورد جو نیز با دقت ۲ درصد برای ارتفاع‌های z تا ۱۰۰۰ متر صدق می‌کند.

مثال ۲.۱

دریاچه «نیوفاوند» (Newfound Lake)، یک دریاچه آب شیرین در نزدیکی بریستول در ایالت نیوهمپشایر، دارای حداکثر عمق ۶۰ متر است و میانگین فشار جو در آن ۹۱ کیلوپاسکال می‌باشد. فشار مطلق (بر حسب کیلوپاسکال) را در این عمقِ بیشینه تخمین بزنید.

راه‌حل

• طرح‌واره سیستم: فرض کنید شکل ۲.۵ نشان‌دهنده دریاچه نیوفاوند است، که در آن h = ۶۰متر و z = ۰در سطح آب قرار دارد.

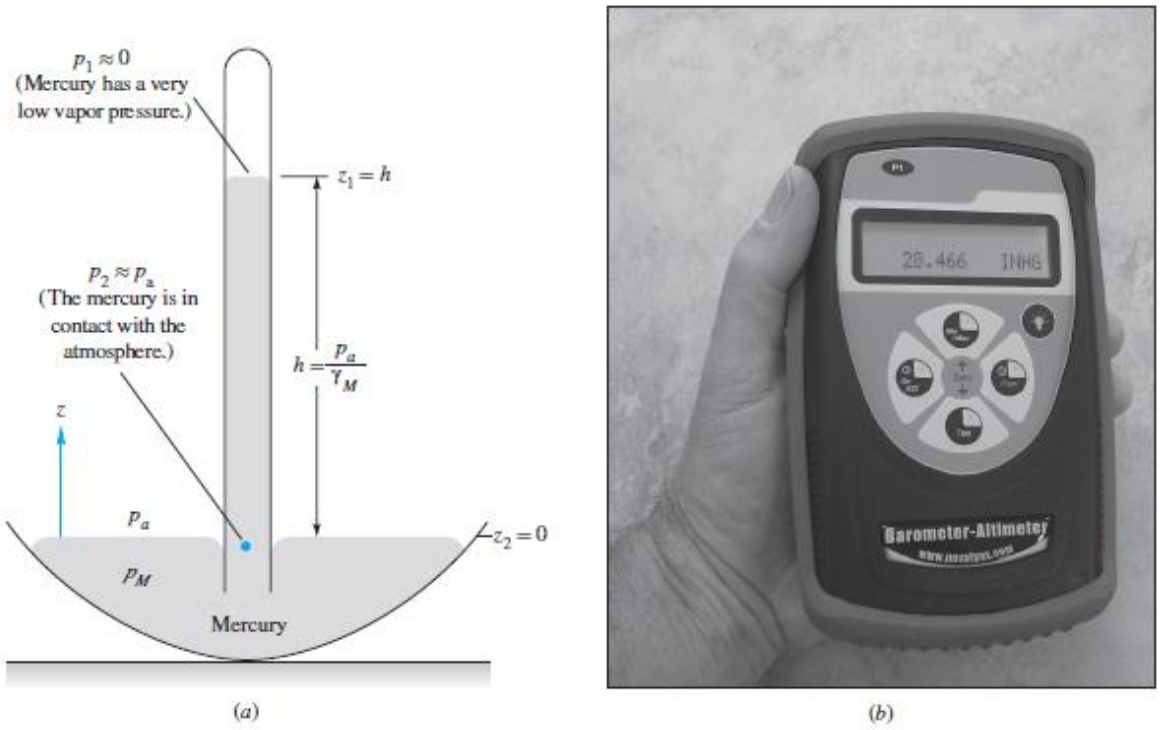
• مقادیر ویژگی‌ها: طبق جدول ۲.۱، وزن مخصوص آب (γwater) برابر ۹۷۹۰ نیوتن بر متر مکعب است. همچنین مقدار فشار جو (patmos) برابر ۹۱ کیلوپاسکال داده شده است.

• مراحل حل: معادله (۲.۱۵) را برای عمیق‌ترین نقطه به کار ببرید. از واحدهای SI (پاسکال) استفاده کنید، نه کیلوپاسکال:

$$p_{\max} = p_a - \gamma z = 91{,}000\ \text{Pa} - \left(9790\ \frac{\text{N}}{\text{m}^3}\right)(-60\ \text{m}) = 678{,}400\ \text{Pa} \approx 678\ \text{kPa} \quad \textit{Ans.}$$

فشارسنج جیوه‌ای

ساده‌ترین کاربرد عملی فرمول هیدرواستاتیک (۲.۱۴)، فشارسنج (بارومتر) است. (شکل ۲.۶) که فشار جو را اندازه‌گیری می‌کند. لوله‌ای از جیوه پر شده و در حالی که درون یک مخزن قرار دارد، به‌صورت وارونه گذاشته می‌شود. این کار باعث ایجاد خلأ نسبی در انتهای بالایی و بستهٔ لوله می‌شود، زیرا جیوه در دمای اتاق، فشار بخار بسیار ناچیزی دارد. (۰/۱۶ پاسکال در دمای ۲۰ درجهٔ سلسیوس). از آنجا که فشار جو باعث می‌شود ستون جیوه به اندازهٔ ارتفاع h درون لوله بالا برود، سطح بالایی جیوه در فشار صفر قرار دارد. با توجه به شکل ۲/۶، معادلهٔ (۲/۱۴) در حالتی صدق می‌کند که در آن p1 = 0 در z1 = h و p2 = pa در z2 = 0 باشد:



شکل ۲.۶ فشارسنج (بارومتر)، فشار مطلق جویِ محلی را اندازه‌گیری می‌کند: (الف) ارتفاع ستون جیوه با فشار جو (p_{atm}) متناسب است؛ (ب) یک فشارسنج-ارتفاع‌سنج دیجیتالِ دستی. (با اجازه شرکت Nova Lynx)

$$p_a - 0 = -\gamma_M (0 - h)$$

or

$$h = \frac{p_a}{\gamma_M} \qquad (2.16)$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p}{RT} g$$

متغیرها را تفکیک کنید و بین نقاط ۱ و ۲ انتگرال بگیرید:

$$\int_1^2 \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{g}{R} \int_1^2 \frac{dz}{T} \qquad (2.17)$$

انتگرال‌گیری نسبت به z نیازمند فرضی در مورد تغییرات دما، یعنی T(z)، است. یک تقریب رایج، مدل جو هم‌دما (ایزوترمال) است که در آن T = T0 فرض می‌شود:

$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g(z_2 - z_1)}{RT_0}\right] \qquad (2.18)$$

کمیتِ داخلِ کروشه، بدونِ بُعد است. (به این موضوع فکر کنید؛ باید بدونِ بُعد باشد، مگر نه؟) معادله (۲.۱۸) تقریبِ مناسبی برای زمین است، اما در واقع، میانگینِ دمای جوِ زمین تا ارتفاعِ حدود ۳۶۰۰۰ فوت (۱۱۰۰۰ متر)، تقریباً به‌صورتِ خطی با افزایشِ z کاهش می‌یابد:

$$T \approx T_0 - Bz \tag{2.19}$$

در اینجا T_0 دمای سطح دریا (مطلق) و B نرخ کاهش دما است که هر دو از روزی به روز دیگر تا حدی تغییر می‌کنند.

جو استاندارد: بر اساس توافق بین‌المللی [۱]، فرض بر این است که مقادیر استاندارد زیر در بازه ارتفاعی ۰ تا ۳۶۰۰۰ فوت صدق می‌کنند:

$$T_0 = 518.69^\circ\text{R} = 288.16\ \text{K} = 15^\circ\text{C}$$
$$B = 0.003566^\circ\text{R/ft} = 0.00650\ \text{K/m}$$

این بخش پایینی جو، تروپوسفر نامیده می‌شود. با جای‌گذاری معادله (۲.۱۹) در معادله (۲.۱۷) و انجام عمل انتگرال‌گیری، رابطه‌ی دقیق‌تری به دست می‌آوریم.

$$p = p_a\left(1 - \frac{Bz}{T_0}\right)^{g/(RB)} \quad \text{where } \frac{g}{RB} = 5.26\ \text{(air)}$$
$$\rho = \rho_o\left(1 - \frac{Bz}{T_o}\right)^{\frac{g}{RB}-1} \quad \text{where } \rho_o = 1.2255\frac{kg}{m^3},\ p_o = 101{,}350\,p_a \tag{2.20}$$

در تروپوسفر، که در آن $z = 0$ در سطح دریا قرار دارد. توان $g/(RB)$ بدون‌بُعد است (که البته باید هم چنین باشد) و برای هوا مقدار استاندارد ۵.۲۶ را دارد، که در آن $R = 287\ m^2/(s^2 \cdot K)$ است.

مدل «اتمسفر استاندارد ایالات متحده» [۱] در شکل ۲.۷ ترسیم شده است. همان‌طور که دیده می‌شود، فشار در ارتفاع $z = 30\ km$ تقریباً به صفر می‌رسد. برای مشاهده‌ی ویژگی‌ها به صورت جدول‌بندی‌شده، به جدول A.6 مراجعه کنید.

مثال ۲.۲ اگر فشار در سطح دریا ۱۰۱,۳۵۰ پاسکال باشد، فشار استاندارد را در ارتفاع ۵۰۰۰ متری محاسبه کنید؛ این کار را با استفاده از (الف) فرمول دقیق و (ب) فرض هم‌دما (ایزوترمال) با دمای استاندارد ۱۵ درجه سلسیوس در سطح دریا انجام دهید. آیا تقریب هم‌دما مناسب است؟

راه‌حل

بخش (الف)

در فرمول دقیق، یعنی معادله (۲.۲۰)، از دمای مطلق استفاده کنید:

$$p = p_a\left[1 - \frac{(0.00650\ \text{K/m})(5000\ \text{m})}{288.16\ \text{K}}\right]^{5.26} = (101{,}350\ \text{Pa})(0.8872)^{5.26}$$
$$= 101{,}350(0.5328) = 54{,}000\ \text{Pa} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

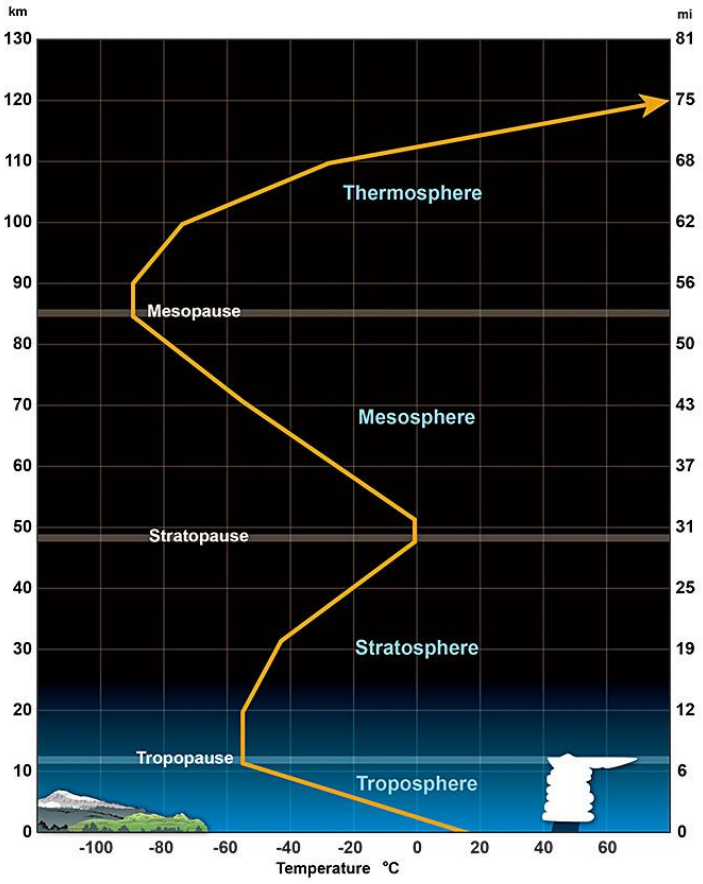
این نتیجه مربوط به فشار استاندارد در ارتفاع z = 5000 متر است که در جدول A.6 ارائه شده است.

بخش (ب)

اگر جو هم‌دما (ایزوترمال) با دمای ۲۸۸.۱۶ کلوین بود، معادله (۲.۱۸) صدق می‌کرد:

$$p \approx p_a \exp\left(\frac{gz}{RT}\right) = (101{,}350\ \text{Pa}) \exp\left\{-\frac{(9.807\ \text{m/s}^2)(5000\ \text{m})}{[287\ \text{m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{K})](288.16\ \text{K})}\right\}$$
$$= (101{,}350\ \text{Pa}) \exp(-0.5929) \approx 56{,}000\ \text{Pa} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

این مقدار ۴ درصد بیشتر از نتیجه دقیق است. فرمول هم‌دما (ایزوترمال) در لایه تروپوسفر دقیق نیست.

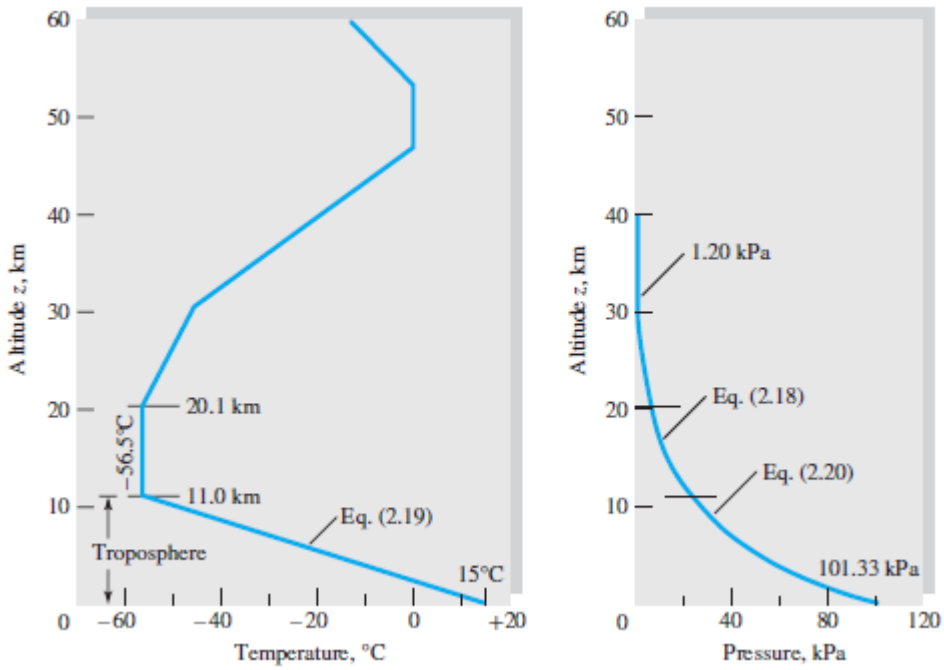




آیا فرمول خطی برای گازها کافی است؟

تقریب خطی از معادله (۲.۱۴)، $\delta p \approx -\rho g\, \delta z$، برای مایعات، که تقریباً تراکم‌ناپذیر هستند، رضایت‌بخش است. برای گازها، این تقریب دقیق نیست مگر اینکه δz نسبتاً کوچک باشد. مسئله P2.26 از شما می‌خواهد که با بسط دوجمله‌ای معادله (۲.۲۰) نشان دهید که خطای استفاده از چگالی ثابت گاز برای تخمین δp از معادله (۲.۱۴) کوچک است اگر

$$\delta z \ll \frac{2T_0}{(n-1)B} \tag{2.21}$$



شکل ۲.۷ توزیع دما و فشار در جو استاندارد ایالات متحده.

منبع: جو استاندارد ایالات متحده، ۱۹۷۶، اداره چاپ دولتی، واشنگتن دی‌سی، ۱۹۷۶.

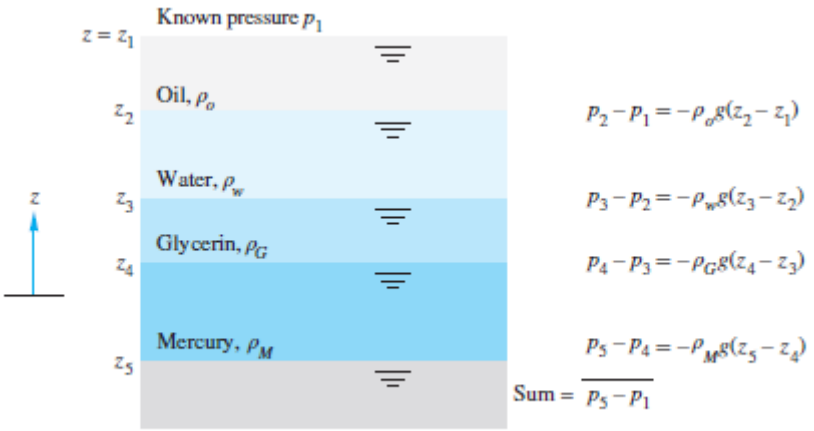
که در آن T_0 دمای مطلق محلی، B نرخ تغییر دما (lapse rate) برگرفته از معادله (۲.۱۹)، و $n = g/(RB)$ توان موجود در معادله (۲.۲۰) است. اگر $\delta z < 200$ متر باشد، میزان خطا کمتر از ۱ درصد خواهد بود.

۲.۴ کاربرد در فشارسنجی (مانومتری)

بر اساس رابطه هیدرواستاتیک (۲.۱۴)، تغییر در ارتفاع یک مایع (یعنی $z_2 - z_1$) معادل تغییر فشاری برابر با $(p_2 - p_1)/\gamma$ است. بنابراین، می‌توان از یک ستون ساکن شامل یک یا چند مایع (یا گاز) برای اندازه‌گیری اختلاف فشار بین دو نقطه استفاده کرد. به چنین ابزاری «مانومتر» (فشارسنج) می‌گویند. از آنجا که مانومتر معمولاً از لوله‌ای به شکل حرف U تشکیل شده است، اغلب به آن «مانومتر U-شکل» (U-tube manometer) گفته می‌شود. اگر از چندین سیال مختلف استفاده شود، هنگام عبور از یک سیال به سیال دیگر، باید چگالی (ρ) را در فرمول تغییر دهیم. شکل ۲.۸ نحوه به‌کارگیری این فرمول را در حالتی نشان می‌دهد که ستونی شامل چندین سیال وجود دارد. تغییر فشار در هر سیال به‌طور جداگانه محاسبه می‌شود. اگر بخواهیم تغییر فشار کل ($p_1 - p_5$) را به دست آوریم، باید تغییرات متوالی یعنی $(p_2 - p_1)$، $(p_3 - p_2)$، $(p_4 - p_3)$ و $(p_5 - p_4)$ را با هم جمع کنیم. در این

فرآیند، مقادیر میانی فشار (p) یکدیگر را خنثی می‌کنند و برای مثالِ نشان‌داده‌شده در شکل ۲.۸، خواهیم داشت:

$$p_5 - p_1 = -\gamma_0(z_2 - z_1) - \gamma_w(z_3 - z_2) - \gamma_G(z_4 - z_3) - \gamma_M(z_5 - z_4) \qquad (2.22)$$



شکل ۲.۸ ارزیابی تغییرات فشار در ستونی متشکل از چندین سیال.

مسیر ما به سمت لایه بالایی در z1 با فشار معلوم است. همانطور که از نقطه z5 به z4 حرکت می‌کنیم، فشار به اندازه $\gamma_M(z4 - z5)$ کاهش می‌یابد. به طور مشابه، به سمت z3، z2 و در نهایت z1 حرکت خواهیم کرد. در فرم معادله، این مراحل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$p_5 - \gamma_M(z_4 - z_5) - \gamma_G(z_3 - z_4) - \gamma_w(z_2 - z_3) - \gamma_o(z_1 - z_2) = p_1$$

به دلیل تفاوت چگالی‌ها، امکان ساده‌سازی بیشتر در سمت راست وجود ندارد. توجه داشته باشید که سیالات را به ترتیبی قرار داده‌ایم که سبک‌ترین آن‌ها در بالا و سنگین‌ترین آن‌ها در پایین قرار گیرد. این تنها آرایش پایدار ممکن است. اگر سعی کنیم آن‌ها را به هر شکل دیگری لایه‌بندی کنیم، سیالات جابه‌جا شده و به همان آرایش پایدار بازمی‌گردند.

به سمت لایه بالایی در تراز z_1، که فشار آن مشخص است، پیش می‌رویم. با حرکت از نقطه z_5 به z_4، فشار به اندازه $\gamma_M(z_4 - z_5)$ کاهش می‌یابد. به همین ترتیب، به سمت ترازهای z_3، z_2 و در نهایت z_1 بالا می‌رویم. این مراحل را می‌توان به صورت معادله چنین بیان کرد:

$$p_5 - \gamma_M(z_4 - z_5) - \gamma_G(z_3 - z_4) - \gamma_w(z_2 - z_3) - \gamma_o(z_1 - z_2) = p_1$$

به عبارت دیگر، هم‌زمان با حرکت به سمت بالا در میان سیال لایه‌بندی‌شده، مقادیر کاهش فشار را پیوسته کسر کنید. این روش به‌ویژه زمانی کارآمد است که برای مانومتر به کار گرفته شود؛ ابزاری که محاسبات آن شامل هر دو جهت «بالا» و «پایین» است.

کاربرد: یک مانومتر ساده

شکل ۲.۹ یک مانومتر ساده لوله-U (U-tube) را نشان می‌دهد که فشار پیمانه‌ای (gage pressure) $$p_A را نسبت به فشار اتمسفر (p_a) اندازه‌گیری می‌کند. سیال موجود در محفظه (با چگالی rho_1\$) توسط سیال دوم و سنگین‌تری (با چگالی $\$rho_2$) از اتمسفر جدا شده است؛ شاید به این دلیل که سیال A خورنده است، یا محتمل‌تر اینکه استفاده از سیال سنگین‌تر ($\$rho_2$) باعث می‌شود مقدار $$z_2 کوچک باقی بماند و در نتیجه طول لوله بازِ مانومتر کوتاه‌تر شود.

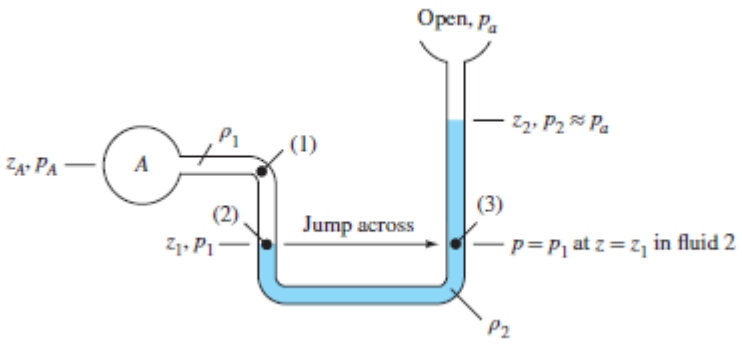
ابتدا از نقطه A شروع کرده و مسیر را تا انتهای بازِ لوله دنبال می‌کنیم. فشار در نقطه A و نقطه (۱) یکسان است؛ با حرکت از نقطه (۱) به نقطه (۲)، فشار به اندازه $\$gamma_1|z_A - z_1$ افزایش می‌یابد. فشار در نقطه (۲) با فشار در نقطه (۳) برابر است، بنابراین می‌توانیم از این فاصله «عبور کنیم» (پرش کنیم) و سپس تا تراز $$z_2 بالا برویم. این مراحل را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$p_A + \gamma_1 |z_A - z_1| - \gamma_2 |z_1 - z_2| = p_2 \approx p_{atm} \qquad (2.23)$$

دلیل فیزیکی دیگری که به ما اجازه می‌دهد در نقطه (۲) «جهش کنیم» (یا از یک سمت به سمت دیگر برویم)، این است که یک توده پیوسته از سیالی واحد، این دو ارتفاع برابر را به هم متصل می‌کند. رابطه هیدرواستاتیکی (۲.۱۴) — که در واقع صورتی از قانون پاسکال است — این برابری را ایجاب می‌کند:

هر دو نقطه‌ای که در یک توده پیوسته از یک سیال ساکن (ایستا) در ارتفاع یکسانی قرار داشته باشند، دارای فشار یکسانی خواهند بود.

توجه داشته باشید که ما نمی‌توانستیم از نقطه (۱) به نقطه‌ای هم‌ارتفاع در لوله سمت راست «جهش کنیم»؛ زیرا این نقاط در یک توده پیوسته و واحد از سیال قرار ندارند. این مفهومِ «جهش» به نقاطی با فشار برابر، حل مسائل مربوط به سیالات متعدد را آسان‌تر می‌کند. با این حال، اگر حباب‌هایی در سیال وجود داشته باشد، این روش دیگر دقیق نخواهد بود.



شکل ۲.۹ مانومتر ساده‌ی باز برای اندازه‌گیری p_A نسبت به فشار اتمسفر.

مثال ۲.۳

کاربرد کلاسیک مانومتر زمانی است که دو شاخهٔ یک لولهٔ U-شکل دارای طول یکسانی باشند (مانند شکل E2.3) و اندازه‌گیری شامل تعیین اختلاف فشار بین دو نقطه در یک تراز افقی باشد. یک کاربرد متداول آن، اندازه‌گیری تغییر فشار در دو سوی یک تجهیز جریان‌سنج (یا وسیلهٔ مرتبط با جریان) است، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است. رابطه‌ای برای اختلاف فشار $p_a - p_b$ بر حسب پارامترهای سیستم در شکل E2.3 استخراج کنید.

راه‌حل

با استفاده از معادله (۲.۱۴)، از نقطه (a) شروع کنید، تغییرات فشار را در اطراف لوله U-شکل محاسبه نمایید و به نقطه (b) برسید:

$$p_a + \rho_1 gL + \rho_1 gh - \rho_2 gh - \rho_1 gL = p_b$$

or

$$p_a - p_b = (\rho_2 - \rho_1)gh \qquad Ans.$$

اندازه‌گیری تنها شامل h، یعنی مقدار خوانده‌شده از مانومتر است؛ جملاتِ حاوی L حذف می‌شوند.

به ظهورِ اختلافِ چگالی میان سیالِ درونِ مانومتر و سیالِ کاری (سیالِ موردِ بررسی) توجه کنید. یکی از اشتباهات رایج دانشجویان، کسر نکردنِ چگالی سیال کاری (rho_1\$) است؛ اگر هر دو سیال مایع باشند، این یک خطای جدی محسوب می‌شود، اما اگر سیال ۱ گاز باشد، از نظر عددی پیامدِ آن کمتر فاجعه‌بار خواهد بود. البته از دیدگاه آکادمیک، چنین اشتباهی همواره نزدِ مدرسانِ مکانیک سیالات، خطایی جدی تلقی می‌شود.

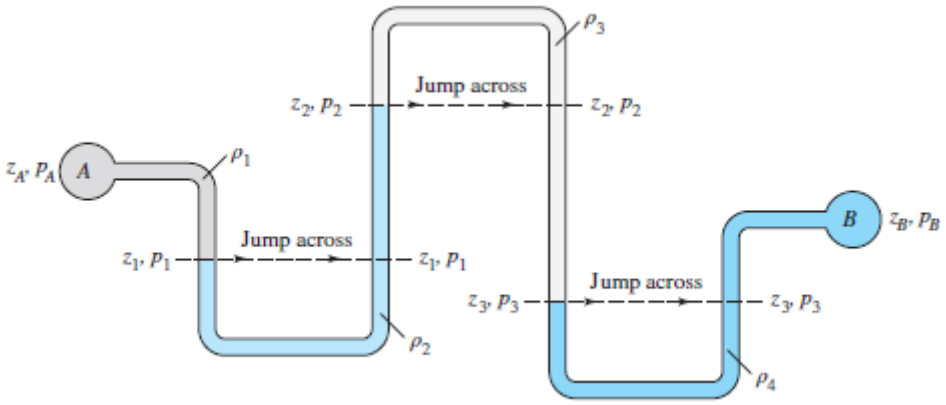
اگرچه مثال ۲.۳ به دلیل کاربرد فراوانش در آزمایش‌های مهندسی، گاهی «فرمول مانومتر» نامیده می‌شود، اما بهتر است آن را حفظ نکنید؛ بلکه توصیه می‌شود معادله (۲.۱۴) را متناسب با هر مسئله‌ی جدیدِ

هیدرواستاتیک که شامل چندین سیال است، به کار بگیرید. برای نمونه، شکل ۲.۱۰ مسئله‌ای را نشان می‌دهد که در آن از یک مانومتر با چندین سیال برای تعیین اختلاف فشار بین دو محفظه‌ی A و B استفاده شده است. با تکرار محاسبات برای سیال‌های موجود در مانومتر که دارای وزن‌های مخصوص متفاوتی هستند، مسیر را از نقطه‌ی A آغاز می‌کنیم: به سمت پایین تا نقطه‌ی ۱ می‌رویم، از عرض عبور می‌کنیم، به سمت بالا تا نقطه‌ی ۲ می‌رویم، دوباره از عرض می‌گذریم، به سمت پایین تا نقطه‌ی ۳ می‌رویم، از عرض عبور می‌کنیم و در نهایت به سمت بالا تا نقطه‌ی B پیش می‌رویم. بدین ترتیب، به صورت معادله خواهیم داشت:

$$p_A + \gamma_1(z_A - z_1) - \gamma_2(z_2 - z_1) + \gamma_3(z_2 - z_3) - \gamma_4(z_B - z_3) = p_B$$

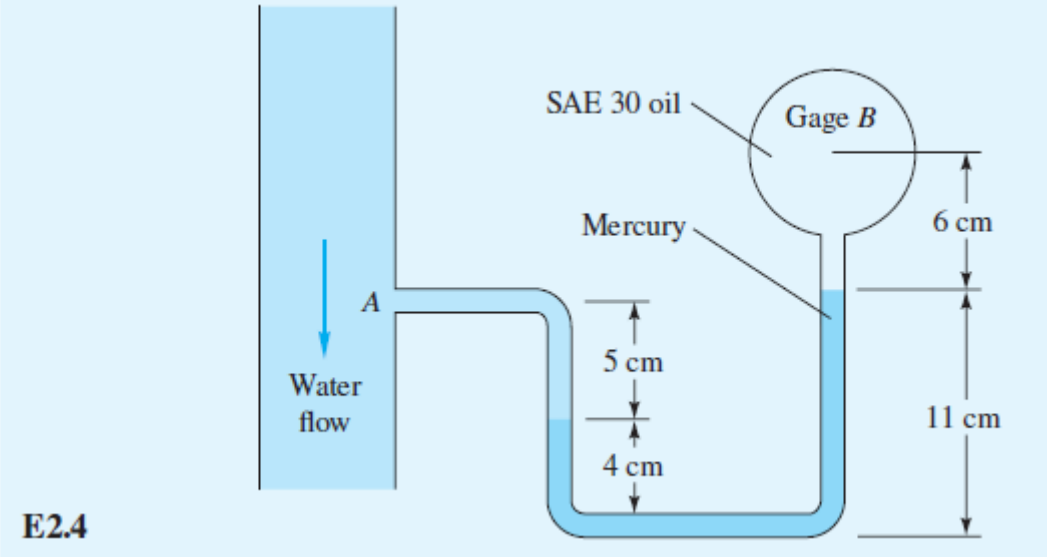
یا اختلاف فشار بین محفظه‌های A و B برابر است با

$$p_A - p_B = -\gamma_1(z_A - z_1) + \gamma_2(z_2 - z_1) - \gamma_3(z_2 - z_3) + \gamma_4(z_B - z_3) \quad (2.24)$$



شکل ۲.۱۰ یک مانومتر چندسیاله پیچیده برای برقراری رابطه میان p_A و p_B. این سامانه چندان کاربردی نیست، اما برای طرح مسئله در تکالیف درسی یا آزمون‌ها مناسب است.

مثال ۲.۴ فشارسنج B برای اندازه‌گیری فشار در نقطه A در یک جریان آب به کار می‌رود. اگر فشار در نقطه B برابر با ۸۷ کیلوپاسکال باشد، فشار در نقطه A را (بر حسب کیلوپاسکال) تخمین بزنید. فرض کنید دمای تمام سیالات ۲۰ درجه سانتی‌گراد است. به شکل E2.4 مراجعه کنید.



راه‌حل

- طرح کلی سیستم: سیستم در شکل E2.4 نشان داده شده است.

- فرض‌ها: سیالات در حالت هیدرواستاتیک، عدم اختلاط، جهت عمودی «رو به بالا» مطابق شکل E2.4.

- رویکرد: استفاده متوالی از معادله (۲.۱۴) برای حرکت از نقطه A به نقطه B.

- مقادیر خواص: برگرفته از جدول ۲.۱ یا جدول A.3:

$$\gamma_{water} = 9790\ \text{N/m}^3; \qquad \gamma_{mercury} = 133{,}100\ \text{N/m}^3; \qquad \gamma_{oil} = 8720\ \text{N/m}^3$$

- مراحل حل: از A به B پیش بروید؛ ابتدا «به سمت پایین» و سپس «به سمت بالا» حرکت کنید و در محل هلالیِ جیوه در سمت چپ، پرشی (انتقالی) انجام دهید:

$$p_A + \rho_w \mid \Delta z \mid_w - \gamma_m \mid \Delta z_m \mid - \gamma_o \mid \Delta z \mid_o = p_B$$

$$\text{or} \quad p_A + (9790\ \text{N/m}^3)(0.05\ \text{m}) - (133{,}100\ \text{N/m}^3)(0.07\ \text{m}) - (8720\ \text{N/m}^3)(0.06\ \text{m}) = 87{,}000$$

$$\text{or} \quad p_A + 490 - 9317 - 523 = 87{,}000 \text{ Solve for } p_A = 96{,}350\ \text{N/m}^2 \approx 96.4\ \text{kPa} \qquad \textit{Ans.}$$

- توضیحات: توجه داشته باشید که واحد N/m^2 را به صورت «پاسکال» (Pa) خلاصه کرده‌ایم. نتیجه‌ی میانیِ پنج‌رقمی، یعنی 96,350 Pa، غیرواقع‌بینانه است؛ زیرا داده‌های موجود تنها با حدود سه رقم بامعنی در دسترس هستند.

در انجام این محاسبات مانومتر، ما تغییرات ارتفاع موییِنگی ناشی از کشش سطحی را که در مثال ۱.۸ مورد بحث قرار گرفت، نادیده گرفته‌ایم. اگر یک سطح مشترک سیال یا هلالی بین سیالات مشابه در دو طرف لوله

U شکل وجود داشته باشد، این اثرات از بین می‌روند. در غیر این صورت، مانند لوله U شکل سمت راست شکل ۲.۱۰، می‌توان با استفاده از لوله‌های با قطر بزرگ (≤۱ سانتی‌متر)، اصلاح مویینگی انجام داد یا این اثر را ناچیز کرد.

۲.۵ نیروهای هیدرواستاتیکی بر سطوح تخت

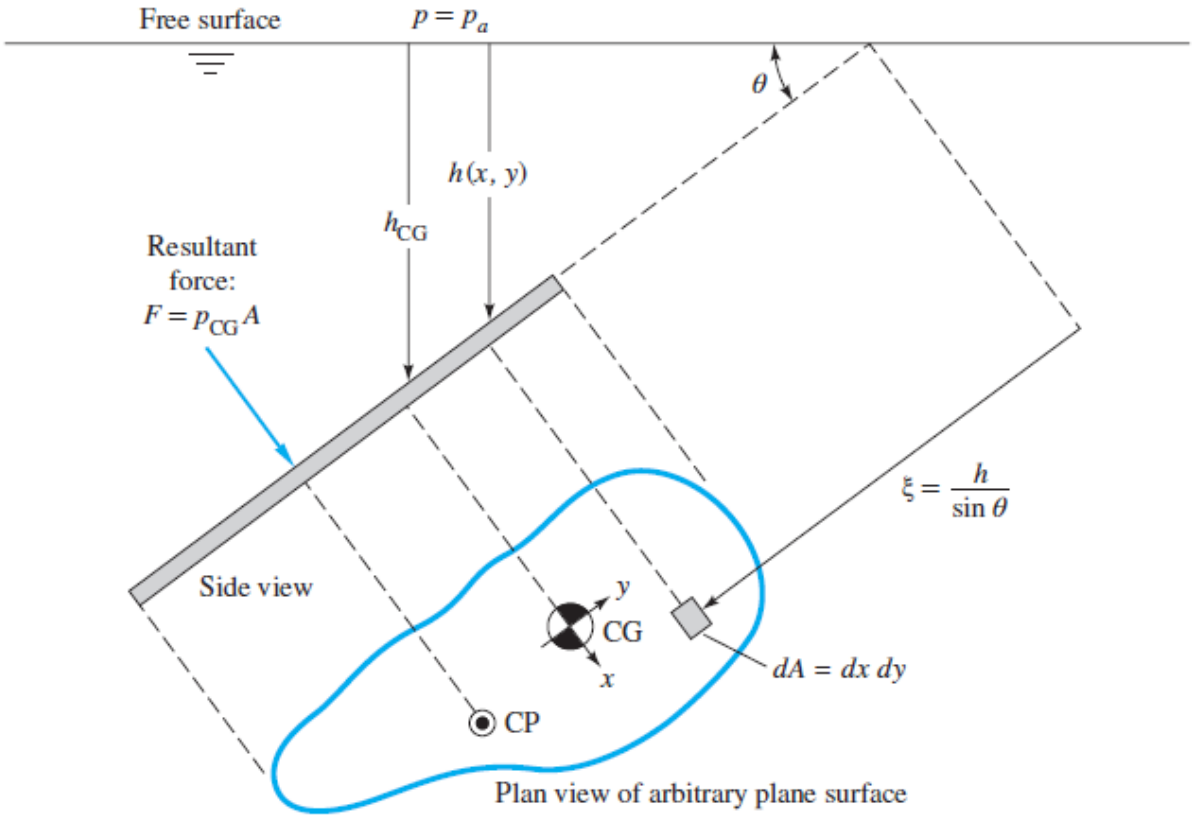
طراحی سازه‌های نگهدارنده مستلزم محاسبه نیروهای هیدرواستاتیکی وارد بر سطوح جامد مختلفی است که در مجاورت سیال قرار دارند. این نیروها با وزن سیالی که بر سطح وارد می‌شود، مرتبط هستند. برای مثال، ظرفی با کف تخت و افقی به مساحت A_b که حاوی آب تا عمق H است، نیرویی رو به پایین به بزرگی $F_b = \gamma H A_b$ را در کف خود تجربه می‌کند. اگر سطح افقی نباشد، برای تعیین مؤلفه‌های افقی نیروی هیدرواستاتیکی، به محاسبات بیشتری نیاز است.

اگر تغییرات چگالی سیال را نادیده بگیریم، معادله (۲.۱۴) برقرار خواهد بود و فشار وارد بر هر سطح غوطه‌ور، به صورت خطی با عمق تغییر می‌کند. برای یک سطح تخت، توزیع خطی تنش دقیقاً مشابه حالت ترکیبی خمش و فشار در یک تیر (مطابق با نظریه مقاومت مصالح) است. بدین ترتیب، مسئله هیدرواستاتیکی به فرمول‌های ساده‌ای تقلیل می‌یابد که شامل مختصات مرکز سطح (سنترویید) و گشتاورهای اینرسی سطح مقطع صفحه هستند.

Liquids: $p_2 - p_1 = -\gamma (z_2 - z_1)$ (2.14)

or $z_1 - z_2 = \frac{p_2}{\gamma} - \frac{p_1}{\gamma}$

شکل ۲.۱۱ یک صفحه تخت با شکل دلخواه را نشان می‌دهد که کاملاً در یک مایع غوطه‌ور است. صفحه مذکور زاویه دلخواه θ را با سطح آزاد افقی مایع می‌سازد، به طوری که عمق در نقاط مختلف سطح صفحه تغییر می‌کند. اگر h عمقِ یک المان سطحیِ کوچک به مساحت dA روی صفحه باشد، طبق معادله (۲.۱۴)، فشار در آن نقطه برابر است با $p = p_a + \gamma h$.



شکل ۲.۱۱ نیروی هیدرواستاتیکی و مرکز فشار بر روی یک سطح تخت دلخواه به مساحت A که با زاویه θ در زیر سطح آزاد قرار گرفته است.

برای استخراج فرمول‌های مربوط به شکل صفحه، یک سیستم مختصات xy در پانل صفحه با مبدا در مرکز ثقل آن که در شکل ۲.۱۱ نشان داده شده است، ایجاد کنید، به علاوه یک مختصات مجازی ξ که از سطح در صفحه پایین‌تر است. سپس نیروی هیدرواستاتیک کل در یک طرف صفحه توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$F = \int p\, dA = \int (p_a + \gamma h)\, dA = p_a A + \gamma \int h\, dA \qquad (2.25)$$

انتگرال باقی مانده با توجه به شکل ۲.۱۱ که $h = \xi \sin \theta$ است و طبق تعریف، فاصله شیب مرکزگرا از سطح تا صفحه برابر است با:

$$\xi_{CG} = \frac{1}{A} \int \xi\, dA$$

بنابراین، از آنجا که θ در امتداد صفحه ثابت است، معادله (۲.۲۵) به این صورت درمی‌آید:

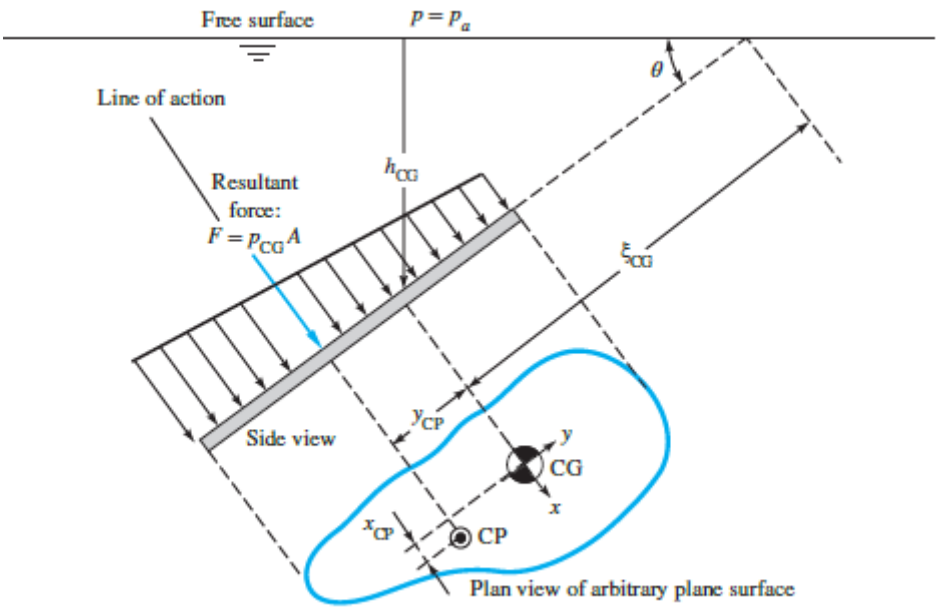
$$F = p_a A + \gamma \sin\theta \int \xi \, dA = p_a A + \gamma \sin\theta \, \xi_{CG} A$$

در نهایت، با توجه به اینکه ξCG sin θ = hCG، عمقی که مستقیماً از سطح تا مرکز صفحه به سمت پایین است، این مسئله را حل کنید. بنابراین

$$F = p_a A + \gamma h_{CG} A = (p_a + \gamma h_{CG}) A = p_{CG} A \qquad (2.26)$$

نیروی وارد بر یک طرفِ هر سطحِ تختِ غوطه‌ور در یک سیال یکنواخت، برابر است با حاصل‌ضرب فشار در مرکز سطحِ صفحه در مساحت آن صفحه؛ این مقدار مستقل از شکل صفحه یا زاویه‌ی $theta\$ (زاویه‌ی شیب آن) است.

معادله (۲.۲۶) را می‌توان به صورت فیزیکی در شکل ۲.۱۲، به عنوان برآیندِ یک توزیع تنش خطی بر روی سطح صفحه، مجسم کرد. این حالت، ترکیبی از فشار و خمش را در تیری با همان مقطع عرضی شبیه‌سازی می‌کند. از این رو، بخش «خمشی» تنش، در صورتی که «محور خنثی» آن از مرکز سطح (سنترویید) صفحه بگذرد، هیچ نیرویی ایجاد نمی‌کند. بنابراین، بخش «فشاری» باقی‌مانده باید برابر با حاصل‌ضرب تنش در مرکز سطح در مساحت صفحه باشد. این همان نتیجه‌ای است که از معادله (۲.۲۶) به دست می‌آید.



شکل ۲.۱۲ نیروی فشار هیدرواستاتیک وارد بر یک سطح تخت، صرف‌نظر از شکل آن، برابر با برآیند توزیع فشار خطی بر روی آن سطح است (F = pCGA). خط اثر این نیرو از «مرکز فشار» (CP) می‌گذرد؛ به‌طوری

که مختصه‌ی yCP پایین‌تر از مرکز هندسی (centroid) قرار دارد و مختصه‌ی xCP در سمت چپ یا راست مرکز هندسی واقع شده است.

با این حال، برای ایجاد تعادل در برابر بخشِ مربوط به گشتاور خمشیِ تنش، نیروی برآیند F نه از مرکز سطح، بلکه پایین‌تر از آن و به سمتِ طرفی که فشار بیشتری دارد، اعمال می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲.۱۲ ترسیم شده است، خط اثر این نیرو از «مرکز فشار» (CP) صفحه می‌گذرد. برای یافتن مختصات (xCP, yCP)، گشتاور نیروهای جزء (p dA) را نسبت به مرکز سطح جمع کرده و با گشتاور نیروی برآیند F برابر قرار می‌دهیم. برای محاسبه yCP، عبارت‌ها را برابر قرار می‌دهیم...

$$Fy_{CP} = \int yp\, dA = \int y(p_a + \gamma\xi \sin\theta)\, dA = \gamma \sin\theta \int y\xi\, dA$$

عبارت $\int p_a y\, dA$ طبق تعریف محورهای مرکزگرا صفر می‌شود. با وارد کردن $\xi = \xi_{CG} - y$، داریم:

$$Fy_{CP} = \gamma \sin\theta \left(\xi_{CG} \int y\, dA - \int y^2\, dA \right) = -\gamma \sin\theta\, I_{xx}$$

که در آن مجدداً $\int y\, dA = 0$ است و Ixx گشتاور اینرسی مساحتیِ سطحِ صفحه نسبت به محور x گذرنده از مرکز سطح آن می‌باشد که در صفحهٔ خودِ صفحه محاسبه شده است. با جایگذاری F، نتیجه حاصل می‌شود

$$y_{CP} = -\gamma \sin\theta \frac{I_{xx}}{p_{CG} A} \qquad (2.27)$$

علامت منفی در معادله (۲.۲۷) نشان می‌دهد که y_{CP} در سطحی پایین‌تر از مرکز سطح قرار دارد و برخلاف F، به زاویه θ وابسته است. اگر صفحه را در عمق بیشتری قرار دهیم، y_{CP} به مرکز سطح نزدیک‌تر می‌شود؛ زیرا در معادله (۲.۲۷) تمام جملات ثابت می‌مانند، به جز p_{CG} که افزایش می‌یابد. تعیین x_{CP} نیز دقیقاً به همین صورت است:

$$Fx_{CP} = \int xp\, dA = \int x[p_a + \gamma(\xi_{CG} - y) \sin\theta]\, dA$$

$$= -\gamma \sin\theta \int xy\, dA = -\gamma \sin\theta\, I_{xy}$$

که در آن Ixy حاصلضرب اینرسی صفحه است که دوباره در صفحه صفحه محاسبه می‌شود. با جایگزینی F داریم:

$$x_{CP} = -\gamma \sin\theta \frac{I_{xy}}{p_{CG}A} \qquad (2.28)$$

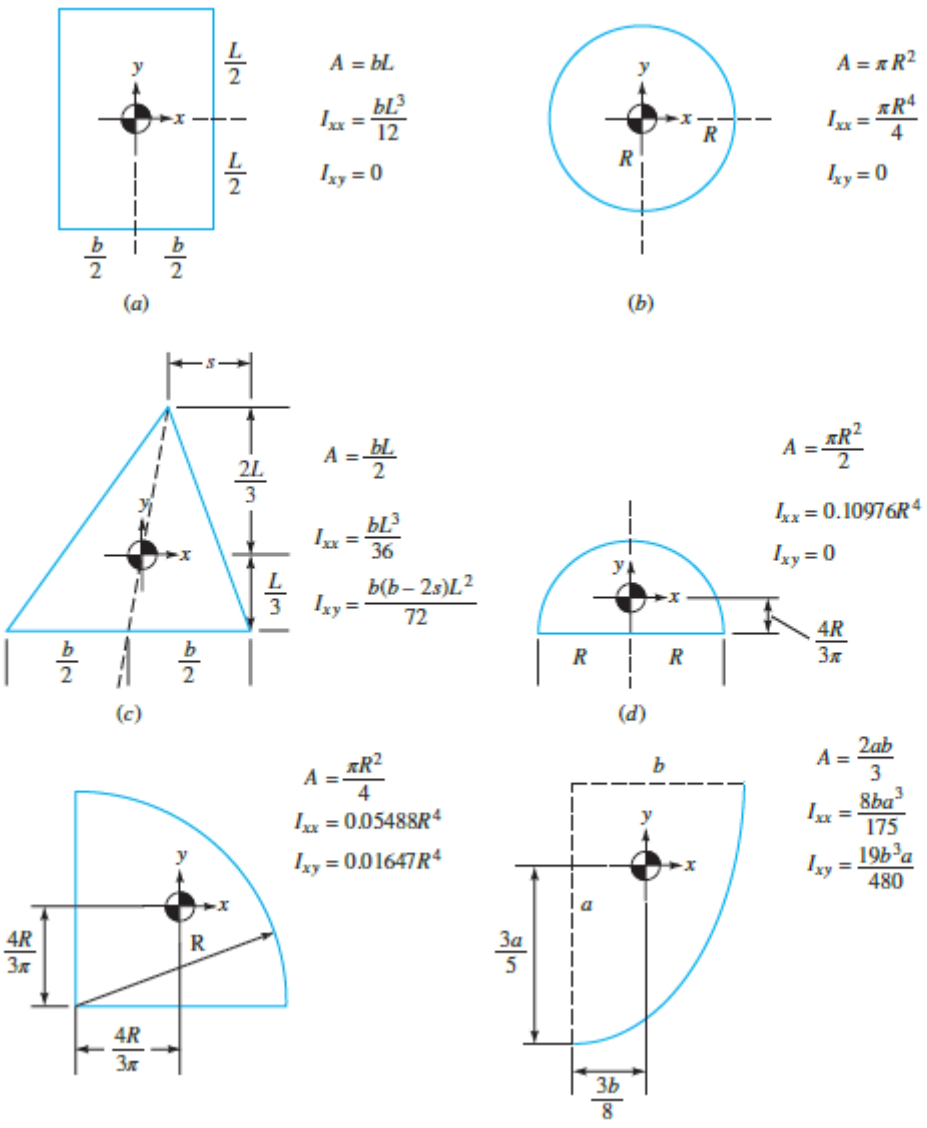
برای I_{xy} مثبت، x_{CP} منفی است؛ زیرا نیروی فشار غالب در ربع سوم — یا همان ربع پایین سمت چپ — صفحه اثر می‌کند. اگر $I_{xy} = 0$ باشد (که معمولاً نشان‌دهنده تقارن است)، آنگاه $x_{CP} = 0$ شده و مرکز فشار دقیقاً در زیر مرکز هندسی (سنتروید) و روی محور y قرار می‌گیرد.

فرمول‌های فشار پیمانه‌ای

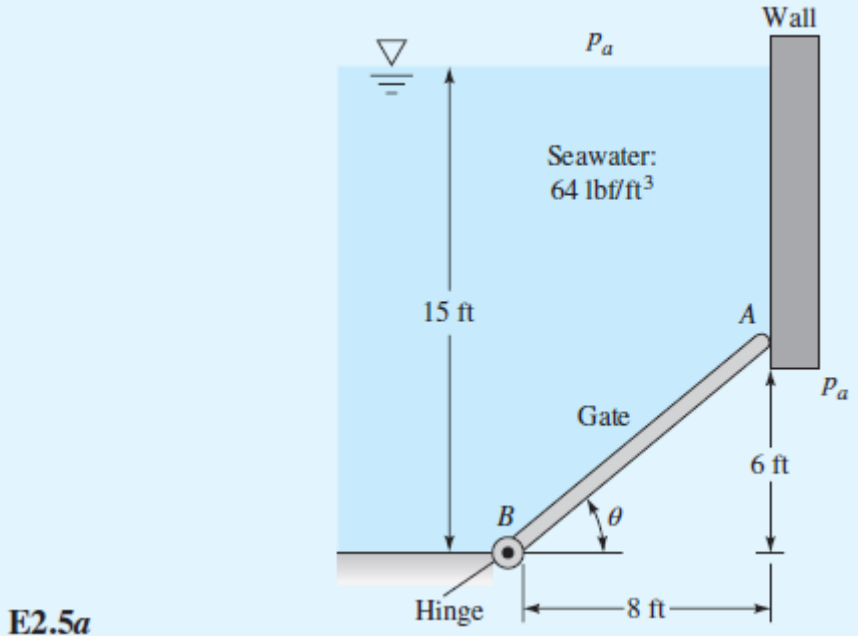
در بیشتر موارد، فشار محیط (p_a) نادیده گرفته می‌شود، زیرا این فشار بر هر دو سوی صفحه وارد می‌گردد؛ برای نمونه، سوی دیگر صفحه ممکن است درون یک کشتی یا در سمت خشکِ یک دریچه یا سد قرار داشته باشد. در این حالت، رابطه به صورت $p_{CG} = \gamma h_{CG}$ در می‌آید و مرکز فشار مستقل از وزن مخصوص می‌شود:

$$F = \gamma h_{CG} A \qquad y_{CP} = -\frac{I_{xx}\sin\theta}{h_{CG}A} \qquad x_{CP} = -\frac{I_{xy}\sin\theta}{h_{CG}A} \qquad (2.29)$$

شکل ۲.۱۳ مساحت و گشتاورهای اینرسیِ چندین مقطع عرضیِ رایج را برای استفاده در این فرمول‌ها ارائه می‌دهد. توجه داشته باشید که θ زاویه بین صفحه و افق است.



مثال ۲.۵ دریچه نشان‌داده‌شده در شکل E2.5a دارای عرض ۵ فوت است، در نقطه B لولا شده و در نقطه A به یک دیوار صیقلی (صاف) تکیه دارد. موارد زیر را محاسبه کنید: (الف) نیروی وارد بر دریچه ناشی از فشار آب دریا، (ب) نیروی افقی P که توسط دیوار در نقطه A اعمال می‌شود، و (ج) نیروهای عکس‌العمل در لولای B.



راه حل

بخش (الف)

از نظر هندسی، طول دریچه از A تا B، ۱۰ فوت است و مرکز ثقل آن در نیمه راه بین یا در ارتفاع ۳ فوت بالاتر از نقطه B قرار دارد. بنابراین عمق hCG برابر با ۱۵ - ۳ = ۱۲ فوت است. مساحت دریچه ۵(۱۰) = ۵۰ فوت مربع است. از نیروی وارد بر دو طرف دریچه صرف نظر کنید. از معادله (۲.۲۶) نیروی هیدرواستاتیک وارد بر دریچه برابر است با

$$F = p_{CG}A = \gamma h_{CG}A = (64\ \text{lbf/ft}^3)(12\ \text{ft})(50\ \text{ft}^2) = 38{,}400\ \text{lbf} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

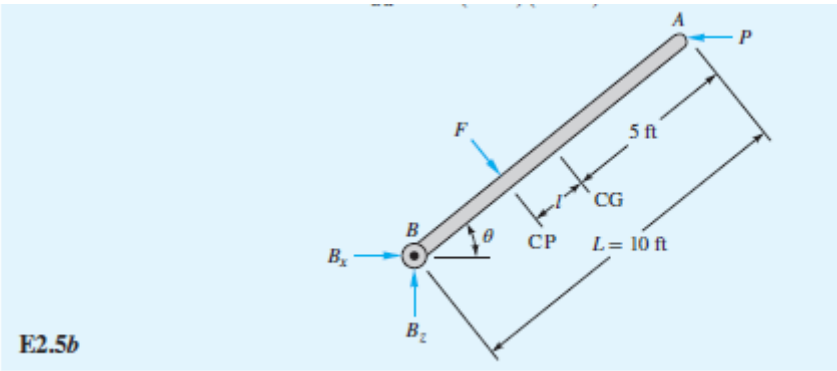
بخش (ب)

ابتدا باید مرکز فشار F را پیدا کنیم. نمودار جسم آزاد دریچه در شکل E2.5b نشان داده شده است. دریچه مستطیل شکل است، بنابراین

$$I_{xy} = 0 \text{ and } I_{xx} = \frac{bL^3}{12} = \frac{(5\ \text{ft})(10\ \text{ft})^3}{12} = 417\ \text{ft}^4$$

فاصله l از مرکز ثقل (CG) تا مرکز فشار (CP) توسط معادلات (۲.۲۹) تعیین می‌شود، زیرا p_a نادیده گرفته شده است.

$$l = -y_{CP} = +\frac{I_{xx}\sin\theta}{h_{CG}A} = \frac{(417\ \text{ft}^4)(\frac{6}{10})}{(12\ \text{ft})(50\ \text{ft}^2)} = 0.417\ \text{ft}$$



بنابراین فاصله نقطه B تا نیروی F برابر است با 10 - l – 5 = 4.583 فوت. با جمع گشتاورها در خلاف جهت عقربه‌های ساعت حول B داریم:

$$PL \sin\theta - F(5 - l) = P(6 \text{ ft}) - (38{,}400 \text{ lbf})(4.583 \text{ ft}) = 0$$

or $$P = 29{,}300 \text{ lbf} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

بخش (ج) با معلوم بودن F و P، مؤلفه‌های واکنش Bx و Bz از طریق جمع نیروهای وارد بر دریچه به دست می‌آیند:

$$\sum F_x = 0 = B_x + F \sin\theta - P = B_x + 38{,}400 \text{ lbf } (0.6) - 29{,}300 \text{ lbf}$$

or $$B_x = 6300 \text{ lbf}$$

$$\sum F_z = 0 = B_z - F \cos\theta = B_z - 38{,}400 \text{ lbf } (0.8)$$

or $$B_z = 30{,}700 \text{ lbf} \qquad \textit{Ans. (c)}$$

این مثال باید دانش شما را در زمینه استاتیک مرور کرده باشد.

حل مثال ۲.۵ با استفاده از فرمول‌های گشتاور اینرسی (معادلات ۲.۲۹) به دست آمد. این فرمول‌ها محاسبات را ساده می‌کنند، اما باعث می‌شوند درک شهودی از نیروها از دست برود. بیایید بخش‌های (الف) و (ب) مثال ۲.۵ را با رویکردی بصری‌تر تکرار کنیم.

مثال ۲.۶: مثال ۲.۵ را تکرار کنید تا توزیع فشار روی صفحه AB را رسم نمایید؛ سپس این توزیع را به بخش‌های مستطیلی و مثلثی تفکیک کنید تا (الف) نیروی وارد بر صفحه و (ب) مرکز فشار را محاسبه نمایید.

حل

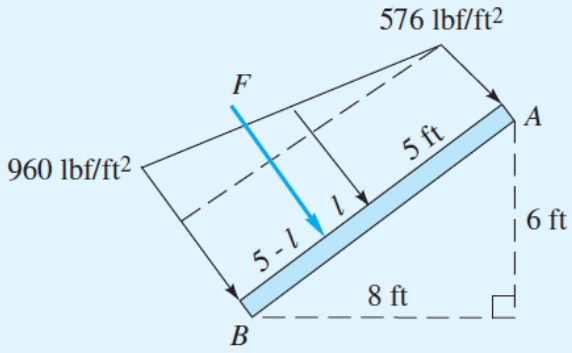
بخش (الف)

نقطه A در عمق ۹ فوتی قرار دارد، بنابراین: $p_A = \gamma h_A = (64 \text{ lbf/ft}^3)(9 \text{ ft}) = 576 \text{ lbf/ft}^2$. به همین ترتیب، نقطه B در عمق ۱۵ فوتی قرار دارد، پس:

$p_B = \gamma h_B = (64 \text{ lbf/ft}^3)(15 \text{ ft}) = 960 \text{ lbf/ft}^2$$ این مقادیر، توزیع خطی فشار را که در شکل E2.6 نشان داده شده است، تعیین می‌کنند. مستطیل دارای ابعاد فشار ۵۷۶ در ۱۰ فوت (در راستای صفحه) و ۵ فوت (در عمق، به سمت داخل صفحه) است. مثلث دارای ابعاد $(۹۶۰ - ۵۷۶) = ۳۸۴ \text{ lbf/ft}^2$ در ۱۰ فوت (در راستای صفحه) و ۵ فوت (در عمق) می‌باشد. مرکز سطح مستطیل در فاصله ۵ فوتی از نقطه A (در امتداد صفحه) قرار دارد. مرکز سطح مثلث در فاصله ۶.۶۷ فوتی از نقطه A (در امتداد صفحه) واقع شده است. نیروی کل برابر است با مجموع نیروی ناشی از مستطیل و نیروی ناشی از مثلث:

$$F = \left(576 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2}\right)(10 \text{ ft})(5 \text{ ft}) + \left(\frac{384}{2} \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^2}\right)(10 \text{ ft})(5 \text{ ft})$$

$$= 28{,}800 \text{ lbf} + 9600 \text{ lbf} = 38{,}400 \text{ lbf} \qquad \textit{Ans. (a)}$$



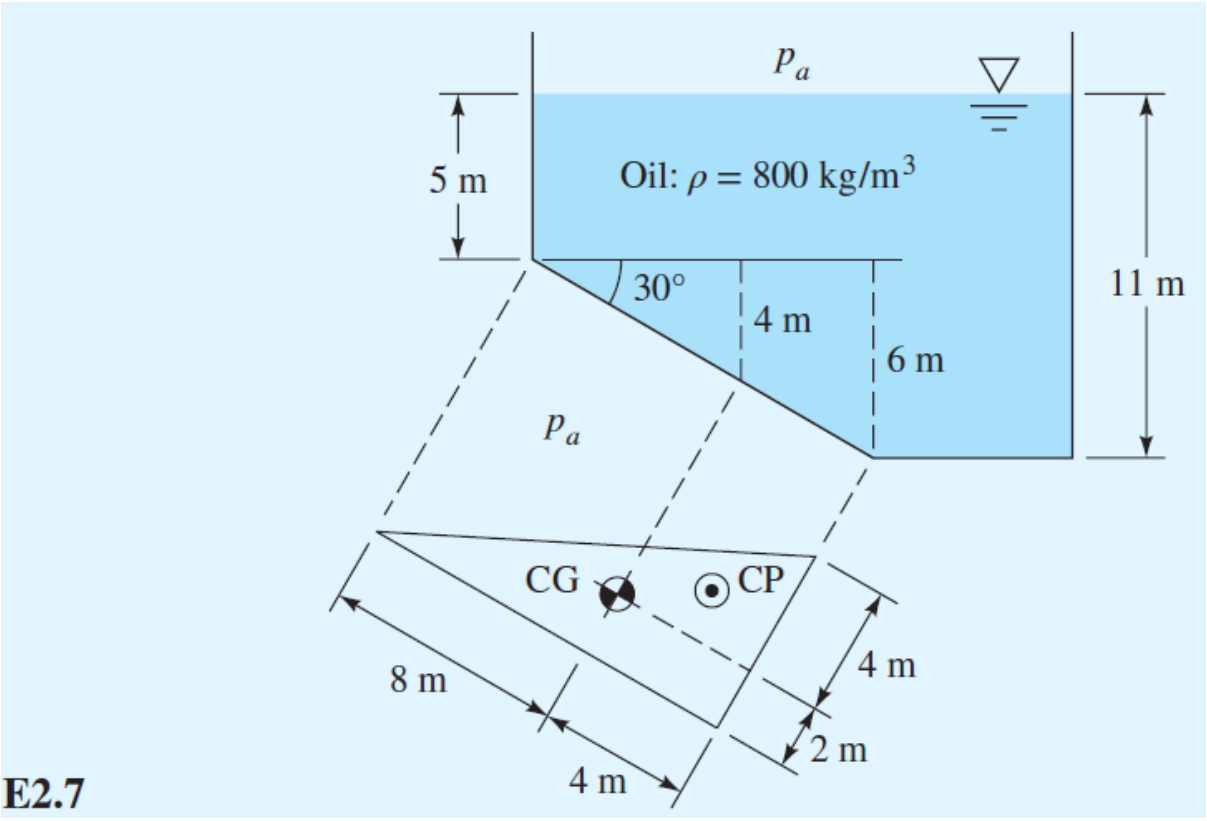
E2.6

$$\Sigma M_A = (28{,}800 \text{ lbf})(5 \text{ ft}) + (9600 \text{ lbf})(6.67 \text{ ft}) = 144{,}000 + 64{,}000 = 208{,}000 \text{ ft} \cdot \text{lbf}$$

Then $$5 \text{ ft} + l = \frac{M_A}{F} = \frac{208{,}000 \text{ ft} \cdot \text{lbf}}{38{,}400 \text{ lbf}} = 5.417 \text{ ft hence } l = 0.417 \text{ ft} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

توضیح: ما همان نیرو و مرکز فشارِ به‌دست‌آمده در مثال ۲.۵ را حاصل می‌کنیم، اما با درکی عمیق‌تر. با این حال، اگر صفحه مستطیلی نباشد، این رویکرد دشوار و پرزحمت خواهد بود. حل مثال ۲.۷ تنها با استفاده از توزیع فشار دشوار خواهد بود، زیرا صفحه در آنجا مثلثی‌شکل است. بنابراین، استفاده از گشتاورهای اینرسی می‌تواند ساده‌سازی مفیدی باشد.

مثال ۲.۷. یک مخزن نفت دارای صفحه‌ای به شکل مثلث قائم‌الزاویه در نزدیکی کف آن است (مطابق شکل E2.7). با صرف‌نظر از p_a، (الف) نیروی هیدرواستاتیکی و (ب) مرکز فشار (CP) وارد بر این صفحه را تعیین کنید.



راه حل

بخش (الف)

این مثلث دارای ویژگی‌هایی است که در شکل c۲.۱۳ داده شده است. مرکز ثقل، همانطور که نشان داده شده است، یک سوم بالاتر (۴ متر) و یک سوم بالاتر (۲ متر) از گوشه پایین سمت چپ است. مساحت عبارت است از

$$\tfrac{1}{2}(6\text{ m})(12\text{ m}) = 36\text{ m}^2$$

گشتاورهای لختی عبارتند از

$$I_{xx} = \frac{bL^3}{36} = \frac{(6\text{ m})(12\text{ m})^3}{36} = 288\text{ m}^4$$

and

$$I_{xy} = \frac{b(b-2s)L^2}{72} = \frac{(6\text{ m})[6\text{ m} - 2(6\text{ m})](12\text{ m})^2}{72} = -72\text{ m}^4$$

عمق مرکز سطح برابر است با $$h_{CG} = 5 + 4 = 9$$ متر؛ بنابراین، نیروی هیدرواستاتیکی طبق معادله (۲.۲۶) عبارت است از

$$F = \rho g h_{CG} A = (800\ \text{kg/m}^3)(9.807\ \text{m/s}^2)(9\ \text{m})(36\ \text{m}^2)$$
$$= 2.54 \times 10^6\ (\text{kg} \cdot \text{m})/\text{s}^2 = 2.54 \times 10^6\ \text{N} = 2.54\ \text{MN} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

بخش (ب)

موقعیت CP توسط معادلات (۲.۲۹) داده شده است:

$$y_{CP} = -\frac{I_{xx} \sin\theta}{h_{CG} A} = -\frac{(288\ \text{m}^4)(\sin 30°)}{(9\ \text{m})(36\ \text{m}^2)} = -0.444\ \text{m}$$
$$x_{CP} = -\frac{I_{xy} \sin\theta}{h_{CG} A} = -\frac{(-72\ \text{m}^4)(\sin 30°)}{(9\ \text{m})(36\ \text{m}^2)} = +0.111\ \text{m} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

نیروی برآیند F = 2.54 MN از این نقطه می‌گذرد؛ نقطه‌ای که همان‌طور در شکل E2.7 نشان داده شده است، در پایین و سمت راست مرکز هندسی قرار دارد.

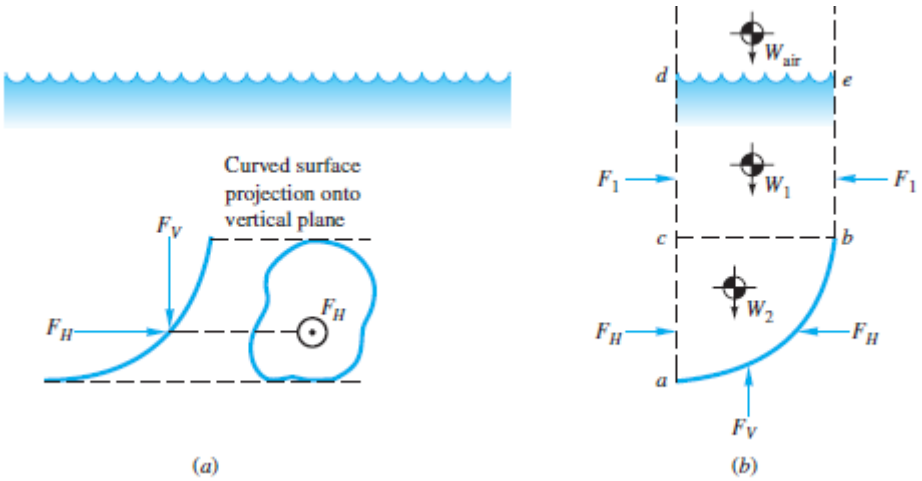
۲.۶ نیروهای هیدرواستاتیک روی سطوح منحنی

نیروی فشار حاصل بر روی یک سطح منحنی به راحتی با تفکیک آن به مؤلفه‌های افقی و عمودی محاسبه می‌شود. سطح منحنی دلخواهی را که در شکل a۲.۱۴ رسم شده است در نظر بگیرید. نیروهای فشار افزایشی، که عمود بر المان محلی هستند، در امتداد سطح تغییر جهت می‌دهند و بنابراین نمی‌توان آنها را به صورت عددی جمع کرد. می‌توانیم سه مؤلفه جداگانه این نیروهای فشار عنصری را جمع کنیم، اما معلوم می‌شود که نیازی به انجام یک انتگرال‌گیری سه‌جانبه پر زحمت نداریم.

شکل b۲.۱۴ نمودار جسم آزاد ستون سیال موجود در تصویر عمودی بالای سطح منحنی را نشان می‌دهد. نیروهای مورد نظر FH و FV توسط سطح بر ستون سیال اعمال می‌شوند. سایر نیروها به دلیل وزن سیال و فشار افقی بر روی اضلاع عمودی این ستون نشان داده شده‌اند. ستون سیال باید در تعادل استاتیک باشد. در قسمت بالایی ستون bcde، مؤلفه‌های افقی F1 دقیقاً در تعادل هستند و به ... مربوط نمی‌شوند.

۲.۶ نیروهای هیدرواستاتیک بر سطوح منحنی

برآیند نیروی فشار وارد بر یک سطح منحنی را می‌توان به ساده‌ترین شکل با تفکیک آن به مؤلفه‌های افقی و قائم محاسبه کرد. سطح منحنی دلخواهی را در نظر بگیرید که در شکل a۲.۱۴ ترسیم شده است. نیروهای فشار جزئی، که بر المان‌های سطحی عمود هستند، در طول سطح تغییر جهت می‌دهند و از این رو نمی‌توان آن‌ها را به صورت عددی (جبری ساده) با هم جمع کرد. اگرچه می‌توان مؤلفه‌های این نیروهای فشاریِ جزئی را به صورت جداگانه جمع کرد، اما خوشبختانه نیازی به انجام یک انتگرال‌گیری سه گانه دشوار و زمان‌بر نیست.



شکل ۲.۱۴ محاسبهٔ نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک سطح منحنی: (الف) سطح منحنی غوطه‌ور؛ (ب) نمودار جسم آزاد سیالِ قرارگرفته در بالای سطح منحنی.

شکل b۲.۱۴ نمودار جسم آزادِ ستونی از سیال را نشان می‌دهد که در تصویر قائمِ بالای سطح منحنی قرار گرفته است. نیروهای مورد نظر، یعنی F_H (مؤلفه افقی) و F_V (مؤلفه قائم)، نیروهایی هستند که سطح منحنی به ستون سیال وارد می‌کند. سایر نیروهای موجود شامل نیروی ناشی از وزن سیال و نیروهای فشار افقی وارد بر وجوه جانبی (قائم) این ستون سیال هستند. این ستون سیال باید در حالت تعادل استاتیکی باشد. در بخش بالایی ستون (ناحیه bcde)، مؤلفه‌های افقی F_1 دقیقاً یکدیگر را خنثی می‌کنند و در این بحث تأثیری ندارند. در بخش پایینی و نامنظم سیال (ناحیه abc) که در مجاورت سطح منحنی قرار دارد، با بررسی مجموع نیروهای افقی مشخص می‌شود که نیروی F_H (ناشی از سطح منحنی) دقیقاً برابر با نیروی F_H وارد بر وجه قائمِ سمت چپِ ستون سیال است. این نیروی سمت چپ را می‌توان با استفاده از فرمول مربوط به سطوح تخت (معادله ۲.۲۶) و بر اساس تصویر قائمِ سطح منحنی محاسبه کرد. این یک قاعده کلی است که تحلیل مسئله را ساده می‌کند:

مؤلفه افقی نیروی وارد بر یک سطح منحنی، برابر است با نیرویی که بر یک سطح تخت وارد می‌شود؛ سطح تختی که از تصویر کردن سطح منحنی بر روی صفحه‌ای قائم (که بر آن مؤلفه افقی عمود است) به دست می‌آید.

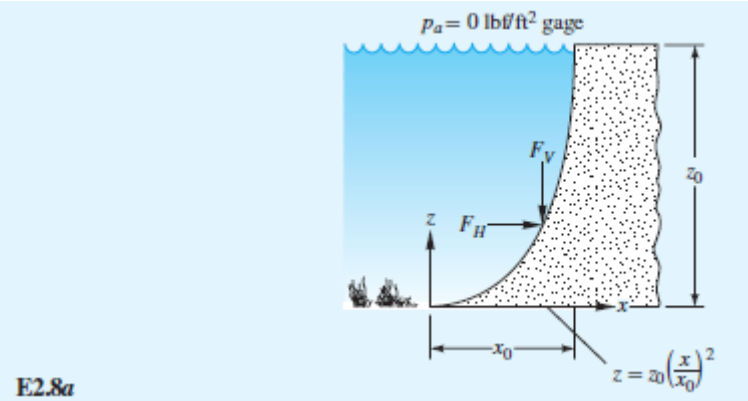
اگر دو مؤلفه افقی وجود داشته باشد، هر دو را می‌توان با استفاده از همین روش محاسبه کرد. سپس، با بررسی مجموع نیروهای قائم وارد بر جسم آزادِ سیال، مشخص می‌شود که

$$F_V = W_1 + W_2 + W_{air} \qquad (2.30)$$

می‌توانیم این مطلب را به عنوان دومین قاعده کلی خود بدین‌گونه بیان کنیم:

مؤلفه قائم نیروی فشار وارد بر یک سطح منحنی، از نظر بزرگی و جهت، برابر است با وزن کل ستون سیال — شامل مایع و جو — که در بالای آن سطح منحنی قرار دارد.

بنابراین، محاسبه F_V (مؤلفه قائم نیرو) عملاً چیزی فراتر از تعیین مرکز جرمِ یک ستون سیال نیست؛ البته اگر بخش پایینی abc در شکل ۲.۱۴ب شکل بسیار پیچیده و دشواری داشته باشد، ممکن است به کمی انتگرال‌گیری نیاز شود.



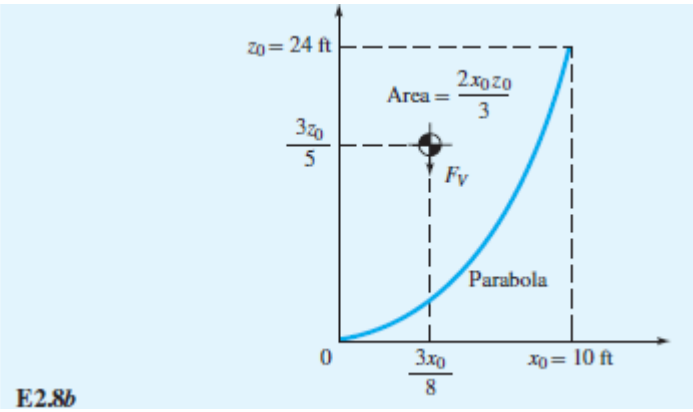
E2.8a

راه‌حل

• طرح کلی سیستم: شکل E2.8b ابعاد مختلف را نشان می‌دهد. عرض سد برابر با b = 50 ft است.

• رویکرد: مقدار FH و خط اثر آن را با استفاده از معادلات (۲.۲۶) و (۲.۲۹) محاسبه کنید. مقدار FV و خط اثر آن را از طریق تعیین وزن سیالِ قرارگرفته در بالای سهمی و یافتن مرکز ثقلِ این وزن، محاسبه نمایید.

• مراحل حل برای مؤلفه افقی: تصویر عمودی سهمی در امتداد محور z در شکل E2.8b قرار دارد و مستطیلی به ارتفاع ۲۴ فوت و عرض ۵۰ فوت است. مرکز ثقل آن در نیمه راه است، یا $h_{CG} = 24/2 = 12$ فوت. مساحت آن A_{proj} = (۲۴ فوت)(۵۰ فوت) = ۱۲۰۰ فوت مربع است. سپس، از معادله (۲.۲۶)،



E2.8b

$$F_H = \gamma h_{CG} A_{proj} = \left(62.4 \frac{\text{lbf}}{\text{ft}^3}\right)(12 \text{ ft})(1200 \text{ ft}^2) = 898{,}560 \text{ lbf} \approx 899 \times 10^3 \text{ lbf}$$

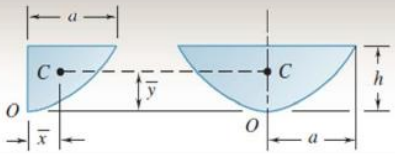
خط اثر F_H پایین‌تر از مرکز سطح A_{proj} قرار دارد، همان‌طور که در معادله (۲.۲۹) آمده است:

$$y_{CP,\,proj} = -\frac{I_{xx}\sin\theta}{h_{CG}A_{proj}} = -\frac{(1/12)(50\text{ ft})(24\text{ ft})^3\sin 90^\circ}{(12\text{ ft})(1200\text{ ft}^2)} = -4\text{ ft}$$

بنابراین، F_H برابر است با ۱۲$ + ۴ = ۱۶$ فوت، که معادل دو-سومِ فاصله از سطح (و ۸ فوت بالاتر از کف) است.

• نکات: توجه داشته باشید که محاسبه‌ی F_H و خط اثر آن، بر اساس تصویر قائمِ سهمی انجام می‌شود، نه خودِ سهمی. از آنجا که این تصویر قائم است، زاویه‌ی آن $theta = 90^\circ$ می‌باشد.

• مراحل حل برای مؤلفه‌ی قائم: نیروی قائم F_V برابر است با وزن آبِ قرارگرفته در بالای سهمی. از آنجا که مقطع سهموی در شکل ۲.۱۳ نیامده است، ناچار شدیم آن را در کتاب دیگری جستجو کنیم. مساحت و مرکز سطح (سنت‌روید) در شکل E2.8b نشان داده شده‌اند. وزنِ این حجمِ آبِ سهموی‌شکل برابر است با:

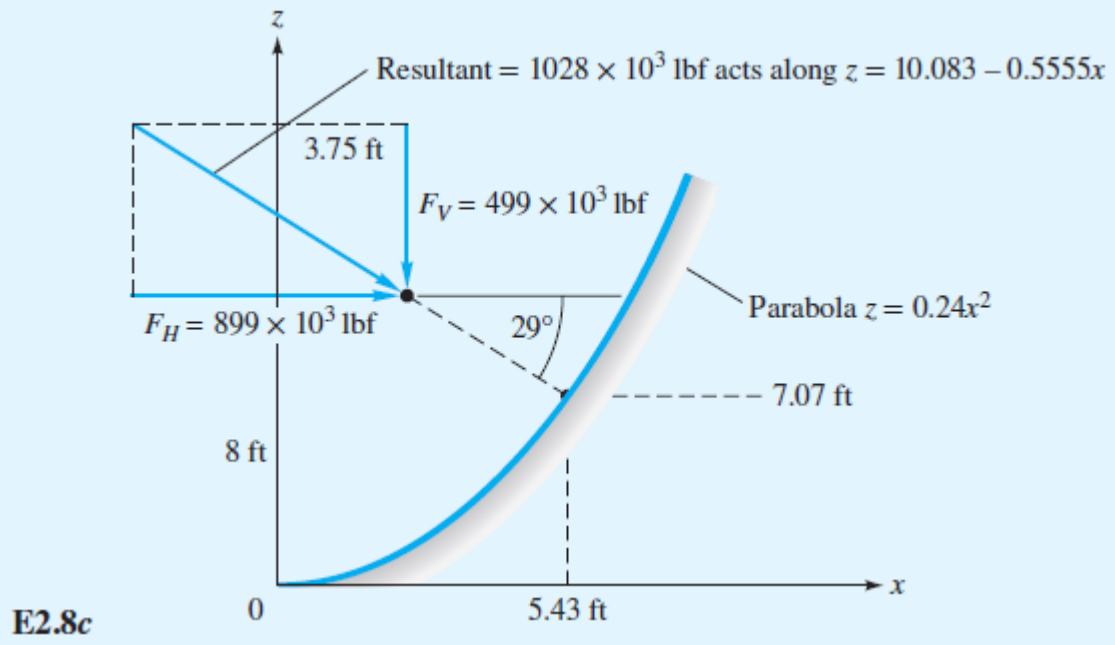
شکل		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Area
نیمه سهمی گون		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
سهمی گون		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

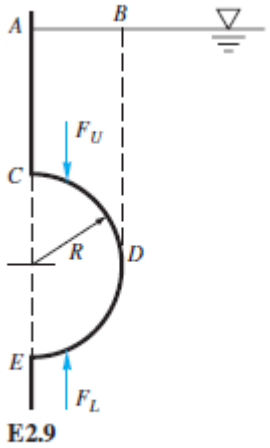
این نیرو به سمت پایین، از طریق مرکز ثقل مقطع سهموی، یا در فاصله ۳ $x_0/8 = 3.75$ فوت از مبدا، همانطور که در شکل‌های E2.8b,c نشان داده شده است، عمل می‌کند. نیروی هیدرواستاتیک حاصل بر سد برابر است با

$$F = (F_H^2 + F_V^2)^{1/2} = [(899\text{E}3\text{ lbf})^2 + (499\text{E}3\text{ lbf})^2]^{1/2} = 1028 \times 10^3\text{ lbf at } 29^\circ \quad Ans.$$

این برآیند در شکل E2.8c نشان داده شده است و از نقطه‌ای می‌گذرد که در فاصله ۸ فوت بالاتر و ۳.۷۵ فوت دورتر از مبدأ مختصات قرار دارد. همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، این برآیند در نقطه‌ای به سد برخورد می‌کند که ۵.۴۳ فوت فاصله افقی و ۷.۰۷ فوت فاصله عمودی از مبدأ دارد.

• توضیحات: توجه داشته باشید که برای محاسبه F_H و F_V از فرمول‌های کاملاً متفاوتی استفاده می‌شود. به عقیده نویسنده، مفهوم «مرکز فشار» (CP) هنگامی که برای سطوح منحنی به کار می‌رود، بیش از حدِ منطقی بسط داده شده است.





مثال ۲.۹

یک فرمول جبری برای نیروی قائم خالص F وارد بر سازه نیم‌دایره‌ایِ بیرون‌زده‌ی CDE (که در مایع غوطه‌ور است) در شکل $$E2.9$$ بیابید. این سازه در امتداد عمود بر صفحه شکل، دارای عرض یکنواخت b است. وزن مخصوص مایع برابر با γ می‌باشد.

حل:

نیروی خالص، اختلاف بین نیروی رو به بالای FL روی سطح پایینی DE و نیروی رو به پایین FU روی سطح بالایی CD است، همانطور که در شکل E2.9 نشان داده شده است. نیروی FU برابر با γ ضربدر حجم ABDC بالای سطح CD است. نیروی FL برابر با γ ضربدر حجم ABDEC بالای سطح DE است. دومی به وضوح

بزرگتر است. اختلاف، ۷ ضربدر حجم خود سازه است. بنابراین نیروی خالص رو به بالای سیال روی نیم استوانه برابر است با

$$F = \gamma_{\text{fluid}} (\text{volume } CDE) = \gamma_{\text{fluid}} \frac{\pi}{2} R^2 b \qquad Ans.$$

این همان اصلی است که قوانین شناوری (بخش ۲.۸) بر پایه آن بنا شده‌اند. توجه داشته باشید که نتیجه حاصل، مستقل از عمق سازه است و به وزن مخصوص سیال بستگی دارد، نه به جنسِ درونِ سازه.

۲.۷ نیروهای هیدرواستاتیکی در سیالات لایه‌بندی‌شده

فرمول‌های مربوط به سطوح تخت و منحنی که در بخش‌های ۲.۵ و ۲.۶ ارائه شدند، تنها برای سیالی با چگالی یکنواخت معتبر هستند. اگر سیال به صورت لایه‌هایی با چگالی‌های متفاوت باشد (مانند شکل ۲.۱۵)، نمی‌توان مسئله را با یک فرمول واحد حل کرد؛ زیرا شیب توزیع خطی فشار در مرز بین لایه‌ها تغییر می‌کند. با این حال، این فرمول‌ها برای هر لایه به طور جداگانه قابل استفاده‌اند؛ بنابراین، راهکار مناسب این است که نیروها و گشتاورهای مربوط به هر لایه را به صورت جداگانه محاسبه کرده و با هم جمع کنیم.

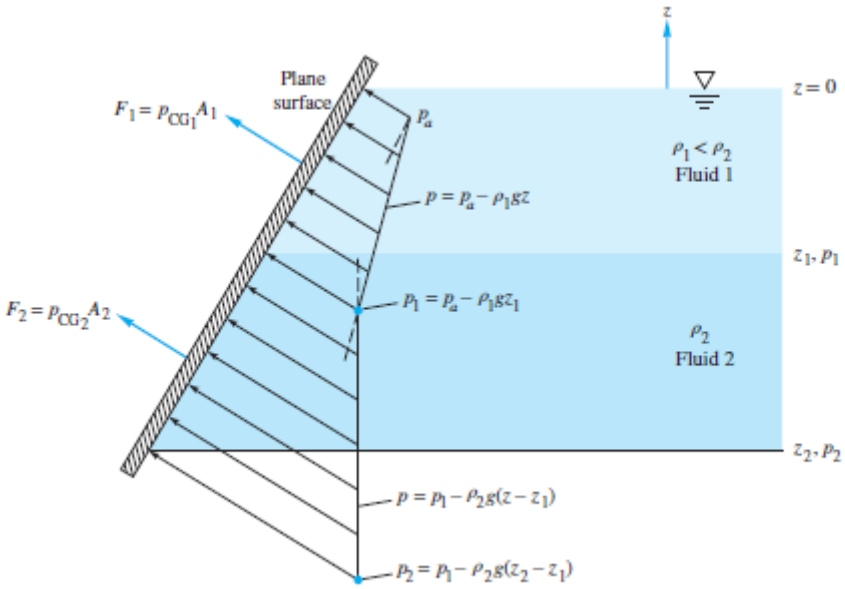
سطح تخت و مائلی را در نظر بگیرید که در یک سیال دو لایه غوطه‌ور است (شکل ۲.۱۵). با حرکت به سمت پایین و ورود به لایه دوم که چگالی بیشتری دارد، شیب توزیع فشار تندتر می‌شود. در این حالت، نیروی کل وارد بر صفحه برابر با حاصل‌ضرب فشار در مرکز سطح (سانتروئید) در مساحت کل صفحه نیست؛ اما برای آن بخش از صفحه که در هر لایه قرار گرفته است، فرمول مذکور صدق می‌کند. بنابراین، می‌توانیم نیروهای هر بخش را با هم جمع کنیم تا نیروی کل به دست آید:

$$F = \sum F_i = \sum p_{CG_i} A_i \qquad (2.31)$$

به‌طور مشابه، می‌توان از مرکز هندسی (سنترویید) بخش صفحه‌ای در هر لایه برای تعیین موقعیت مرکز فشار بر روی آن بخش استفاده کرد:

$$y_{CP_i} = -\frac{\rho_i g \sin\theta_i I_{xx_i}}{p_{CG_i} A_i} \qquad x_{CP_i} = -\frac{\rho_i g \sin\theta_i I_{xy_i}}{p_{CG_i} A_i} \qquad (2.32)$$

این فرمول‌ها مرکز فشارِ نیروی خاصِ F_i را نسبت به مرکز هندسیِ آن بخشِ مشخص از صفحه در لایه تعیین می‌کنند، نه نسبت به مرکز هندسیِ کلِ صفحه. سپس می‌توان مرکز فشارِ نیروی کل ($F = \sum F_i$) را با محاسبه‌ی مجموع گشتاورها حول یک نقطه‌ی مناسب، مانند سطح، به دست آورد. مثال زیر این موضوع را نشان می‌دهد.



شکل ۲.۱۵ نیروهای هیدرواستاتیک وارد بر سطحی که در یک سیال لایه‌بندی‌شده غوطه‌ور است، باید به‌صورت بخش‌های جداگانه با هم جمع شوند.

مثال ۲.۱۰

مخزنی به عمق ۲۰ فوت و عرض ۷ فوت، حاوی لایه‌هایی شامل ۸ فوت نفت، ۶ فوت آب و ۴ فوت جیوه است. (الف) نیروی هیدرواستاتیک کل و (ب) مرکز فشار برآیندِ سیال بر دیواره‌ی سمت راست مخزن را محاسبه کنید.

حل

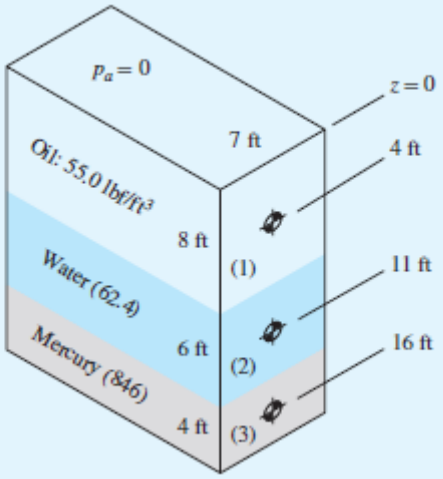
بخش (الف)

دیواره‌ی انتهایی را مطابق شکل E2.10 به سه قسمت تقسیم کنید و با استفاده از رابطه‌ی (۲.۲۶)، فشار هیدرواستاتیک را در مرکز هندسی (سنتروئید) هر بخش — به صورت مرحله‌به‌مرحله همان‌طور که در شکل E2.10 نشان داده شده است — تعیین نمایید:

$$p_{CG_1} = (55.0\ \text{lbf/ft}^3)(4\ \text{ft}) = 220\ \text{lbf/ft}^2$$
$$p_{CG_2} = (55.0)(8) + 62.4(3) = 627\ \text{lbf/ft}^2$$
$$p_{CG_3} = (55.0)(8) + 62.4(6) + 846(2) = 2506\ \text{lbf/ft}^2$$

سپس این فشارها در مساحت‌های مربوط به هر پنل ضرب می‌شوند تا نیروی وارد بر هر بخش به دست آید:

$$F_1 = p_{CG_1}A_1 = (220\ \text{lbf/ft}^2)(8\ \text{ft})(7\ \text{ft}) = 12{,}300\ \text{lbf}$$
$$F_2 = p_{CG_2}A_2 = 627(6)(7) = 26{,}300\ \text{lbf}$$
$$F_3 = p_{CG_3}A_3 = 2506(4)(7) = \underline{70{,}200\ \text{lbf}}$$
$$F = \sum F_i = 108{,}800\ \text{lbf} \qquad \textit{Ans. (a)}$$



E2.10

بخش (ب)

معادلات (۲.۳۲) را می‌توان برای تعیین CP هر نیروی F_i استفاده کرد، با توجه به اینکه $\theta = 90^\circ$ و $\sin\theta = 1$ برای همه قسمت‌ها است. گشتاورهای اینرسی عبارتند از:

for all parts. The moments of inertia are $I_{xx_1} = (7\ \text{ft})(8\ \text{ft})^3/12 = 298.7\ \text{ft}^4$, $I_{xx_2} = 7(6)^3/12 = 126.0\ \text{ft}^4$, and $I_{xx_3} = 7(4)^3/12 = 37.3\ \text{ft}^4$. The centers of pressure are thus at

$$y_{CP_1} = -\frac{\rho_1 g I_{xx_1}}{F_1} = -\frac{(55.0\ \text{lbf/ft}^3)(298.7\ \text{ft}^4)}{12{,}300\ \text{lbf}} = -1.33\ \text{ft}$$
$$y_{CP_2} = -\frac{62.4(126.0)}{26{,}300} = -0.30\ \text{ft} \qquad y_{CP_3} = -\frac{846(37.3)}{70{,}200} = -0.45\ \text{ft}$$

این مختصات zCP1 = -4 – 1.33 = -5.33 فوت، zCP2 = -11 – 0.30 = -11.30 فوت و zCP3 = - 16 – 0.45 = -16.45 فوت را نشان می‌دهد. با جمع گشتاورها حول سطح، داریم:

$$\sum F_i z_{CP_i} = F z_{CP}$$
$$\text{or} \qquad 12{,}300(-5.33) + 26{,}300(-11.30) + 70{,}200(-16.45) = 108{,}800 z_{CP}$$
$$\text{or} \qquad z_{CP} = \frac{1{,}518{,}000}{108{,}800} = -13.95\ \text{ft} \qquad \textit{Ans. (b)}$$

مرکز فشارِ برآیندِ کلِ نیروهای وارد بر سمت راست مخزن، در عمق ۱۳.۹۵ فوتیِ زیر سطح قرار دارد.

۲.۸ شناوری و پایداری

همان اصولی که برای محاسبه نیروهای هیدرواستاتیک وارد بر سطوح به کار می‌روند، برای تعیین نیروی خالص فشار وارد بر جسمی که کاملاً در سیال غوطه‌ور است یا روی آن شناور می‌باشد نیز قابل استفاده‌اند. حاصل این اصول، دو قانون شناوری است که ارشمیدس در قرن سوم پیش از میلاد کشف کرد:

۱. جسمی که در یک سیال غوطه‌ور باشد، تحت تأثیر یک نیروی شناوری عمودی قرار می‌گیرد که برابر با وزن سیال جابه‌جا شده توسط آن جسم است.

۲. جسمی که روی یک سیال شناور است، به اندازه وزن خود از آن سیال را جابه‌جا می‌کند.

ارشمیدس (۲۱۲–۲۸۷ پیش از میلاد) در شهر-دولت یونانی «سیراکوز» — که امروزه در جزیره سیسیل واقع شده — متولد شد و در همان‌جا زیست. او ریاضی‌دان و مهندسی نابغه بود که دو هزاره از زمانه خود جلوتر حرکت می‌کرد. او مقدار دقیقی برای عدد پی (π) محاسبه کرد و با جمع زدنِ اشکالِ جزءبه‌جزء، مساحت و حجم اجسام گوناگون را به صورت تقریبی به دست آورد؛ به عبارت دیگر، او حساب انتگرال را ابداع کرد. او ابزارهایی نظیر اهرم‌ها، قرقره‌ها، منجنیق‌ها و پمپ‌های پیچی را توسعه داد. ارشمیدس نخستین کسی بود که اعداد بزرگ را به صورت توان‌هایی از ۱۰ نوشت و از به‌کارگیری اعداد رومی اجتناب کرد. او همچنین اصول شناوری — که در اینجا به بررسی آن‌ها می‌پردازیم — را زمانی استنتاج کرد که متوجه شد هنگام نشستن در وان حمام، چقدر احساس سبکی می‌کند.

دو قانون ارشمیدس را می‌توان به‌سادگی با مراجعه به شکل ۲.۱۶ استخراج کرد. در شکل ۲.۱۶ الف، جسم میان یک سطح منحنی بالایی (سطح ۱) و یک سطح منحنی پایینی (سطح ۲) قرار گرفته است. بر اساس معادله (۲.۳۰) برای نیروی عمودی، این جسم تحت تأثیر یک نیروی خالص رو به بالا قرار می‌گیرد.

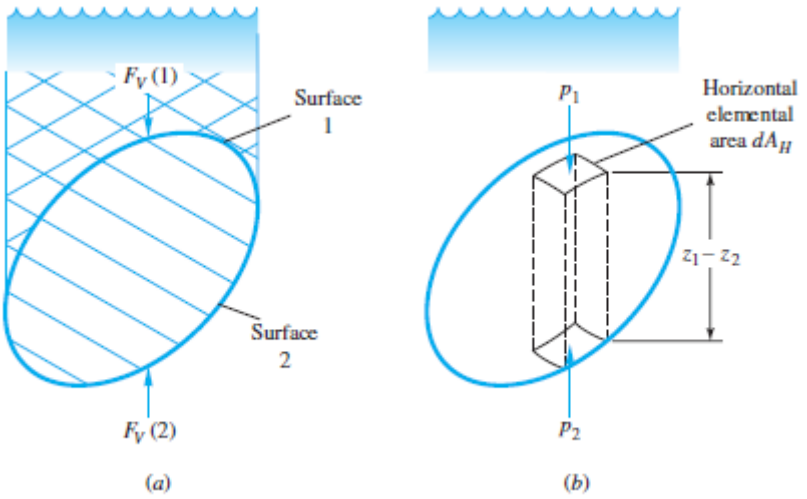
$$F_B = F_V(2) - F_V(1)$$

= (وزن سیالِ بالای ۲) — (وزن سیالِ بالای ۱)

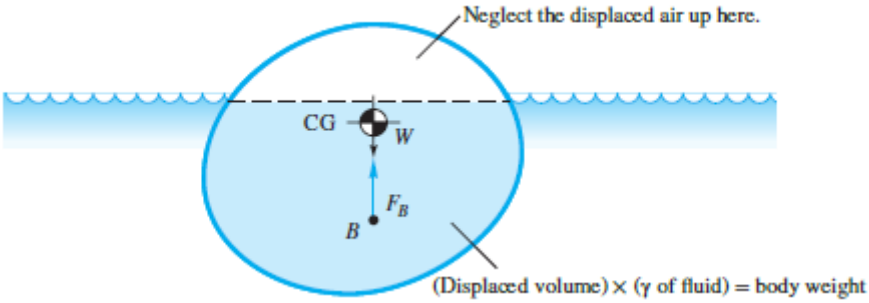
= وزن سیالِ معادلِ حجم جسم

از سوی دیگر، با استفاده از شکل ۲.۱۶b، می‌توانیم نیروهای قائم وارد بر برش‌های قائمِ جزءی در بدنهٔ غوطه‌ور را با هم جمع کنیم:

$$F_B = \int_{\text{body}} (p_2 - p_1)\, dA_H = -\gamma \int (z_2 - z_1)\, dA_H = (\gamma)(\text{body volume}) \qquad (2.34)$$



شکل ۲.۱۶ دو رویکرد متفاوت برای بررسی نیروی شناوری وارد بر یک جسم غوطه‌ورِ دلخواه: (الف) نیروهای وارد بر سطوح منحنیِ بالایی و پایینی؛ (ب) جمع‌بستن نیروهای ناشی از فشار در راستای قائم (برای اجزای سطح).



شکل ۲.۱۷ تعادل ایستای یک جسم شناور.

این نتایج یکسان هستند و با قانون اول ارشمیدس معادل‌اند. در معادله (۲.۳۴) فرض بر این است که سیال دارای وزن مخصوص یکنواختی است. خط اثر نیروی شناوری از مرکز حجمِ جسمِ جابه‌جاشده می‌گذرد؛ یعنی همان مرکز جرمی که با فرضِ داشتنِ چگالی یکنواخت محاسبه شده است. این نقطه که نیروی شناوری (F_B) از آن می‌گذرد، «مرکز شناوری» نامیده می‌شود و معمولاً در نقشه‌ها با نماد B یا CB نشان داده می‌شود. البته، نقطه B ممکن است بر مرکز جرم واقعیِ ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی جسم — که ممکن است چگالی متغیری داشته باشد — منطبق باشد یا نباشد. معادله (۲.۳۴) را می‌توان برای یک سیال لایه‌بندی‌شده (LF) تعمیم داد؛ بدین صورت که وزنِ هر یک از لایه‌های سیال (با چگالی rho_i) را که توسط جسمِ غوطه‌ور جابه‌جا شده‌اند، با هم جمع می‌کنیم:

$$(F_B)_{LF} = \sum \rho_i g(\text{displaced volume})_i \qquad (2.35)$$

هر لایه جابه‌جا شده، مرکز حجم خاص خود را دارد و برای یافتن «مرکز شناوری» یک جسم غوطه‌ور، باید گشتاورهای نیروهای شناوریِ جزءبه‌جزء (ناشی از هر لایه) را با هم جمع کرد.

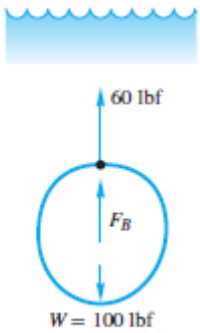
از آنجا که مایعات نسبتاً سنگین هستند، ما متوجه نیروهای شناوری آن‌ها می‌شویم؛ اما گازها نیز بر هر جسمی که در آن‌ها قرار گیرد، نیروی شناوری وارد می‌کنند. برای مثال، میانگین وزن مخصوص بدن انسان حدود ۶۰ پوند-نیرو بر فوت مکعب (lbf/ft^3) است. اگر وزن یک فرد را ۱۸۰ پوند-نیرو در نظر بگیریم، می‌توان حجم کل بدن او را حدود ۳.۰ فوت مکعب تخمین زد. با این حال، در این محاسبه، نیروی شناوریِ هوای اطراف فرد نادیده گرفته شده است. در شرایط استاندارد، وزن مخصوص هوا ۰.۰۷۶۳ پوند-نیرو بر فوت مکعب است؛ بنابراین، نیروی شناوری تقریباً برابر با ۰.۲۳ پوند-نیرو خواهد بود. اگر وزن همین فرد در خلأ اندازه‌گیری شود، حدود ۰.۲۳ پوند-نیرو بیشتر خواهد بود. در مورد بالن‌ها و کشتی‌های هوایی (دیریجابل‌ها)، نیروی شناوری هوا نه تنها ناچیز نیست، بلکه عامل تعیین‌کننده در طراحی آن‌ها محسوب می‌شود.

همچنین، بسیاری از پدیده‌های جریان، نظیر جابه‌جایی طبیعی (همرفت) گرما و اختلاط قائم در اقیانوس‌ها، به شدت تحت تأثیر نیروهای شناوری‌ای هستند که در ظاهر کوچک به نظر می‌رسند.

اجسام شناور حالت خاصی دارند؛ به طوری که تنها بخشی از جسم در سیال غوطه‌ور است و بخش دیگر آن از سطح آزاد سیال بیرون زده است. این وضعیت در شکل ۲.۱۷ نشان داده شده است که در آن، قسمت سایه‌دار همان حجم جابه‌جا شده می‌باشد. معادله (۲.۳۴) به گونه‌ای اصلاح می‌شود که برای این حجمِ کوچک‌تر قابل استفاده باشد:

$$F_B = (\gamma)(\text{displaced volume}) = \text{floating-body weight}$$

نیروی شناوری نه تنها با وزن جسم برابر است، بلکه هر دو بر یک خط راست قرار دارند؛ زیرا برای برقراری تعادل ایستا، گشتاور خالص باید برابر با صفر باشد. معادله (۲.۳۶) معادل ریاضی «قانون دوم ارشمیدس» است که در ابتدای این بخش بیان شد.



E2.11

مثال ۲.۱۱

یک قطعه بتنی در هوا ۱۰۰ پوند-نیرو (lbf) وزن دارد و هنگامی که در آب شیرین (با چگالی وزنی ۶۲.۴ پوند-نیرو بر فوت مکعب) غوطه‌ور می‌شود، «وزن» آن به ۶۰ پوند-نیرو کاهش می‌یابد. وزن مخصوص (چگالی وزنی) متوسط این قطعه چقدر است؟

حل

نمودار جسم آزاد قطعه‌ی غوطه‌ور (شکل E2.11 را ببینید) تعادلی را میان وزن ظاهری، نیروی شناوری و وزن واقعی نشان می‌دهد:

$$\sum F_z = 0 = 60 + F_B - 100$$

or $$F_B = 40 \text{ lbf} = (62.4 \text{ lbf/ft}^3)(\text{block volume, ft}^3)$$

با حل معادله، حجم بلوک برابر با ۶۲.۴/ ۴۰ = ۰.۶۴۱ فوت مکعب می‌شود. بنابراین، وزن مخصوص بلوک برابر است با:

$$\gamma_{\text{block}} = \frac{100 \text{ lbf}}{0.641 \text{ ft}^3} = 156 \text{ lbf/ft}^3 \qquad \textit{Ans.}$$

گاهی اوقات، وزن و حجم یک جسم به‌گونه‌ای است که نسبت آن‌ها با وزن مخصوص سیال برابر می‌شود. در این حالت، جسم دارای «شناوری خنثی» خواهد بود و در هر نقطه‌ای از سیال که در آن غوطه‌ور باشد، به‌صورت ساکن باقی می‌ماند. ذرات کوچکِ دارای شناوری خنثی گاهی در «مصورسازی جریان» به کار می‌روند؛ همچنین از نوعی جسم با شناوری خنثی به نام «شناور سوالو» (Swallow float) [۲] برای ردیابی جریان‌های اقیانوسی استفاده می‌شود. یک زیردریایی می‌تواند با پمپاژ آب به درون مخازن تعادل (بالاست) خود یا تخلیه آن از این مخازن، به شناوری مثبت، خنثی یا منفی دست یابد.

پایداری

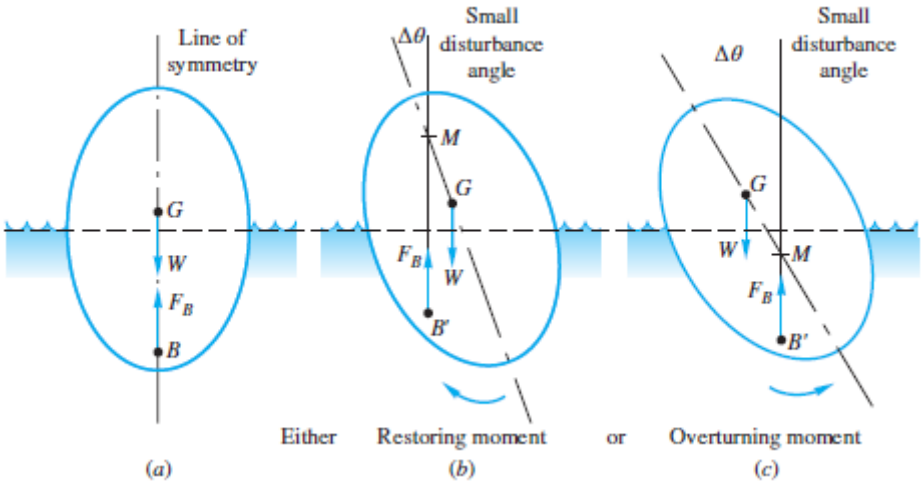
یک جسم شناور، همان‌طور که در شکل ۲.۱۷ نشان داده شده است، ممکن است در وضعیتی که در آن شناور است، پایدار نماند. در این صورت، جسم در اولین فرصت واژگون می‌شود و گفته می‌شود که از نظر استاتیکی ناپایدار است؛ درست مانند مدادی که روی نوک خود متعادل شده باشد. کوچک‌ترین اختلالی باعث می‌شود که جسم به دنبال وضعیت تعادل دیگری بگردد که پایدار باشد. مهندسان باید به‌گونه‌ای طراحی کنند که از ناپایداری اجسام شناور جلوگیری شود. تنها راه برای اطمینان از اینکه آیا یک وضعیت شناوری پایدار است یا خیر، این است که از نظر ریاضی، اختلال اندکی در وضعیت جسم ایجاد کنیم و ببینیم آیا «گشتاور بازگرداننده‌ای» ایجاد می‌شود که جسم را به موقعیت اولیه‌اش بازگرداند یا خیر. اگر چنین باشد، جسم پایدار است؛ در غیر این صورت، ناپایدار است. انجام چنین محاسباتی برای اجسام شناور با اشکال دلخواه، توسط مهندسان دریایی به سطحی بسیار دقیق و پیشرفته رسیده است [۳]، اما ما می‌توانیم حداقل اصول اولیه محاسبه پایداری استاتیکی را بیان کنیم. شکل ۲.۱۸ نحوه محاسبه را برای حالت معمولِ یک جسم شناور متقارن نشان می‌دهد. مراحل کار به شرح زیر است:

۱. وضعیت شناوری پایه با استفاده از معادله (۲.۳۶) محاسبه می‌شود. مرکز جرم جسم (G) و مرکز شناوری (B) تعیین می‌گردند.

۲. جسم به اندازه زاویه کوچکی ($\Delta\theta$) کج می‌شود و خط آب جدیدی برای حالتی که جسم در این زاویه شناور است، تعیین می‌گردد. موقعیت جدید مرکز شناوری (B') محاسبه می‌شود. خطی عمودی که از نقطه B' به سمت بالا رسم شود، خط تقارن را در نقطه‌ای به نام «متاسنتر» (Metacenter) که با نماد M نشان داده می‌شود، قطع می‌کند. برای زوایای کوچک، موقعیت این نقطه مستقل از مقدار $\Delta\theta$ است.

۳. اگر نقطه M بالاتر از G قرار گیرد (یعنی ارتفاع متاسنتریک MG مثبت باشد)، یک گشتاور بازگرداننده وجود دارد و وضعیت اولیه پایدار است. اگر M پایین‌تر از G باشد (MG منفی)، جسم ناپایدار است و در صورت بروز اختلال، واژگون خواهد شد. با افزایش مقدار MG، پایداری نیز افزایش می‌یابد.

بنابراین، ارتفاع متاسنتریک ویژگی‌ای از مقطع عرضی جسم برای یک وزن مشخص است و مقدار آن معیاری برای سنجش پایداری جسم محسوب می‌شود. برای جسمی با سطح مقطع و آب‌خور متغیر، مانند یک کشتی، محاسبه‌ی «متاسنتر» می‌تواند بسیار پیچیده باشد.



شکل ۲.۱۸ محاسبه‌ی مرکز فرارفت (متاسنتر) M برای جسم شناورِ

نشان‌داده‌شده در (a). جسم را به اندازه‌ی زاویه‌ی کوچک Δθ کج کنید. در این حالت، یا (b) نقطه‌ی B′ به فاصله‌ی دوری جابه‌جا می‌شود (قرار گرفتن نقطه‌ی M در بالای G نشان‌دهنده‌ی پایداری است)؛ یا (c) نقطه‌ی B′ جابه‌جایی اندکی دارد (قرار گرفتن نقطه‌ی M در پایین G نشان‌دهنده‌ی ناپایداری است).

پایداری مرتبط با ناحیه خط آب۱

معماران نیروی دریایی [۳] مفاهیم کلی پایداری را از شکل ۲.۱۸ به یک محاسبه ساده شامل ممان اینرسی مساحت ناحیه خط آب (همانطور که از بالا دیده می‌شود) حول محور شیب توسعه داده‌اند. این مشتق - برای جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه کنید - فرض می‌کند که جسم دارای تغییر شکل هموار (بدون ناپیوستگی) در نزدیکی خط آب است. به یاد بیاورید که M مرکز ثقل، B مرکز شناوری و G مرکز ثقل است. فرمول ظریف نهایی، فواصل بین این نقاط را به هم مرتبط می‌کند:

$$\overline{MG} = \frac{I_O}{v_{\text{sub}}} - \overline{GB} \qquad (2.37)$$

در اینجا I_O گشتاور اینرسی مساحت سطح آب نسبت به محور کج‌شدگی O است و v_{sub} حجم بخش غوطه‌ورِ جسم شناور می‌باشد. بدیهی است که برای پایدار بودن جسم، مقدار MG باید مثبت باشد.

مهندس، موقعیت نقاط G و B را بر اساس شکل کلی و طراحی جسم شناور تعیین می‌کند و سپس با محاسبه I_O و v_{sub}، مثبت بودن یا نبودن MG را مشخص می‌نماید.

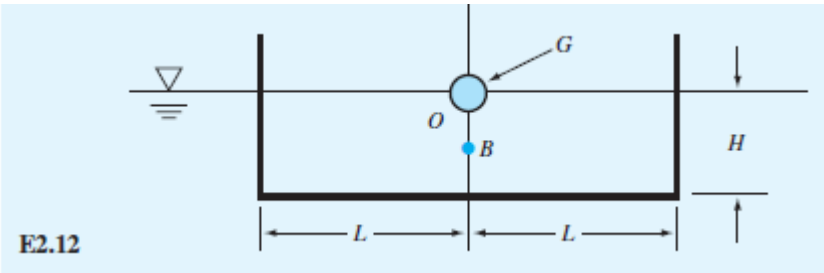
در طراحی مهندسی، کارآمدیِ نتایج در عمل اهمیت دارد. اگر جسم شناور — همان‌طور که در شکل ۲.۱۹ نشان داده شده است — به صخره‌ها برخورد کرده و به گل بنشیند، تحلیل پایداری آن بی‌فایده خواهد بود.



شکل ۲.۱۹ کشتی مسافربری ایتالیایی «کوستا کنکوردیا» که در ۱۴ ژانویه ۲۰۱۲ به گل نشست. در صورت بروز اشتباهات از سوی اپراتور، ممکن است تحلیل پایداری کارآمد نباشد (گرگوریو بورگیا/AP Images).

مثال ۲.۱۲

یک شناور (بارج) دارای مقطع مستطیلی یکنواخت با عرض $2L$ و آب‌خور (عمق غوطه‌وری) به ارتفاع H است، همان‌طور که در شکل E2.12 نشان داده شده است. موارد زیر را تعیین کنید: (الف) ارتفاع متاسنتریک برای یک زاویه کج‌شدگی کوچک، و (ب) بازه نسبت L/H که در آن شناور از نظر استاتیکی پایدار باشد، با فرض اینکه نقطه G (مرکز ثقل) دقیقاً روی خط آب قرار دارد (مطابق شکل).



راه حل

اگر قایق دارای طول b تا، داخل کاغذ باشد، مساحت خط آب، نسبت به محور شیب O، دارای قاعده b و ارتفاع $2L$ است؛ بنابراین، $I_O = b(2L)^3/12$. در همین حال، $\forall_{sub} = 2LbH$. معادله (۲.۳۷) پیش‌بینی می‌کند

$$\overline{MG} = \frac{I_o}{v_{sub}} - \overline{GB} = \frac{8bL^3/12}{2LbH} - \frac{H}{2} = \frac{L^2}{3H} - \frac{H}{2} \qquad Ans.\ (a)$$

بنابراین، قایق تنها در صورتی می‌تواند پایدار باشد که

$$L^2 > 3H^2/2 \text{ or } 2L > 2.45H \qquad Ans.\ (b)$$

هرچه عرض بارج نسبت به آبخور آن بیشتر باشد، پایداری آن نیز بیشتر خواهد بود. پایین آوردن مرکز ثقل (G) نیز به این امر کمک می‌کند.



شکل ۲.۲۰ یک کوه یخ در اقیانوس اطلس شمالی که بر اثر جدا شدن (زایش) از یک یخچال طبیعی در گرینلند پدید آمده است. این کوه‌های یخ، و همتایانِ حتی بزرگ‌ترِ آن‌ها در جنوبگان، بزرگ‌ترین توده‌های شناور در جهان هستند. (دیمیتری رزنیشنکو/شاتراستوک)

حتی یک متخصص نیز ممکن است در تعیین پایداریِ شناوریِ یک جسمِ شناور با شکل نامنظم، دچار مشکل شود. چنین اجسامی ممکن است دارای دو یا چند وضعیت پایدار باشند. برای مثال، یک کشتی ممکن است به همان شکلی که مطلوب ماست (به‌طوری که بتوانیم روی عرشه آن بنشینیم) شناور بماند، یا ممکن است به‌صورت وارونه (واژگون‌شده) روی آب قرار گیرد. در مرجع ۴، رویکردی ریاضی و جالب برای بررسی پایداری شناوری ارائه شده است. نویسنده این مرجع خاطرنشان می‌کند که حتی اشکال ساده، مانند یک مکعب با چگالی یکنواخت، ممکن است دارای حالات پایدارِ متعددی برای شناور ماندن ش استوانه‌های دایره‌ایِ همگن نیز می‌توانند به‌گونه‌ای شناور شوند که محور تقارن آن‌ها نسبت به خط قائم زاویه داشته باشد (کج قرار گیرد).

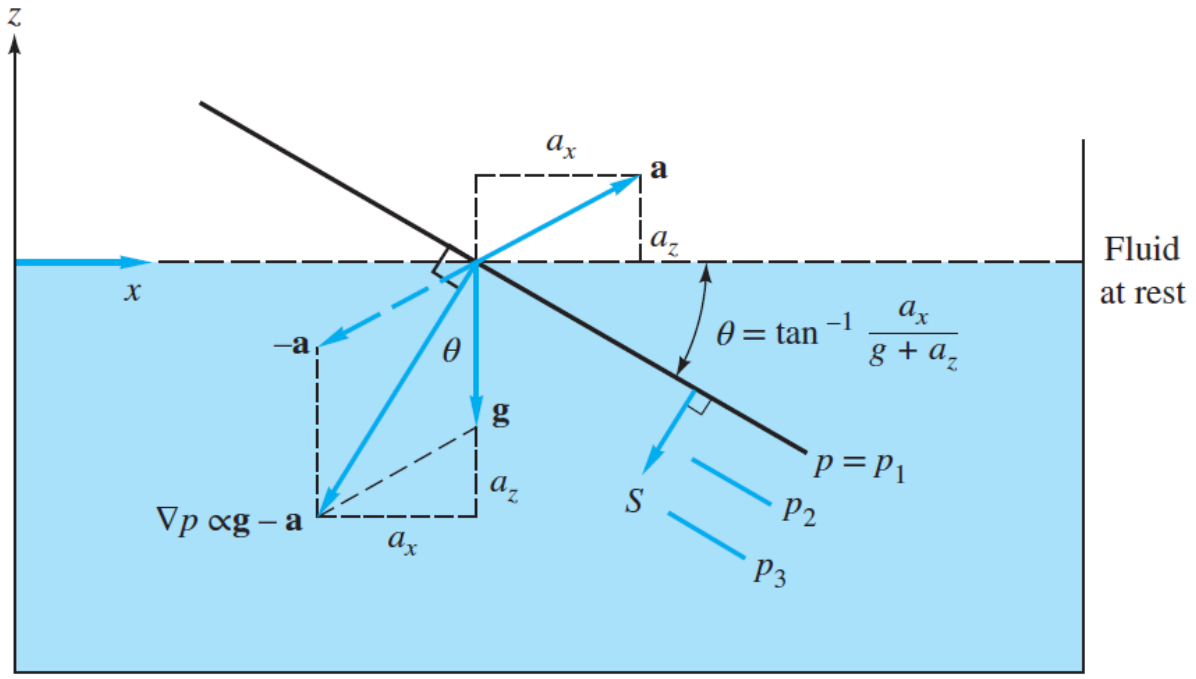
ناپایداریِ شناوری در طبیعت نیز رخ می‌دهد. ماهی‌ها معمولاً به‌گونه‌ای شنا می‌کنند که صفحات تقارن بدنشان در وضعیت قائم قرار دارد؛ اما پس از مرگ، این وضعیت ناپایدار می‌شود و ماهی‌ها به‌گونه‌ای روی آب شناور می‌مانند که پهلوهای تخت آن‌ها رو به بالا قرار می‌گیرد. کوه‌های یخی عظیم ممکن است در پی تغییر شکل ناشی از ذوب شدن در زیر آب، ناپایدار شده و واژگون شوند. واژگونیِ کوه‌های یخی رویدادی چشمگیر و به‌ندرت دیده‌شده است. شکل ۲.۲۰ یک کوه یخی معمولی در اقیانوس اطلس شمالی را نشان می‌دهد که بر اثر جدا شدن (شکستن) از یک یخچال طبیعی در گرینلند — که به درون اقیانوس پیشروی کرده بود — پدید آمده است. سطحِ نمایانِ این کوه یخی ناهموار است که نشان می‌دهد بخش‌های دیگری از آن نیز جدا شده‌اند. کوه‌های یخی از آبِ شیرینِ یخزده و حباب‌دارِ یخچال‌های طبیعی تشکیل شده‌اند و چگالی متوسط آن‌ها ۹۰۰ کیلوگرم بر متر مکعب است. بنابراین، هنگامی که یک کوه یخی در آب دریا — که چگالی متوسط آن ۱۰۲۵ کیلوگرم بر متر مکعب است — شناور می‌شود، حدود ۱۰۲۵/۹۰۰ (یا هفت‌هشتم) از حجم آن در زیر آب قرار می‌گیرد.

۲.۹ توزیع فشار در حرکت جسم صلب

در حرکت جسم صلب، تمام ذرات تحت ترکیبی از حرکت انتقالی و دورانی قرار دارند و هیچ‌گونه حرکت نسبی میان ذرات وجود ندارد. با نبودِ حرکت نسبی، کرنش یا نرخ کرنش نیز وجود نخواهد داشت؛ در نتیجه، جملهٔ مربوط به لزجت در معادلهٔ (۲.۸) حذف می‌شود و تعادلی میان فشار، نیروی گرانش و شتاب ذرات باقی می‌ماند:

$$\nabla p = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) \qquad (2.38)$$

گرادیان فشار در جهت $g - a$ عمل می‌کند و خطوط فشار ثابت (از جمله سطح آزاد، در صورت وجود) بر این جهت عمود هستند. حالت کلی حرکت ترکیبی انتقالی و دورانی یک جسم صلب در فصل ۳، شکل ۳.۱۱ مورد بحث قرار گرفته است.



شکل ۲.۲۱ کج‌شدن سطوح فشار ثابت در مخزن حاوی مایع، تحت شتاب‌گیری به صورت جسم صلب.

سیالات به ندرت می‌توانند با حرکت جسم صلب حرکت کنند، مگر اینکه توسط دیوارهای محدودکننده برای مدت طولانی مهار شوند. برای مثال، فرض کنید یک مخزن آب در خودرویی قرار دارد که با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. آب درون مخزن شروع به تلاطم می‌کند و این تلاطم به آرامی کاهش می‌یابد تا اینکه سرانجام ذرات آب تقریباً با شتاب جسم صلب مواجه می‌شوند. این روند آنقدر طول می‌کشد که خودرو به سرعت‌های مافوق صوت می‌رسد. با این وجود، حداقل می‌توانیم توزیع فشار در مخزنی از آب با شتاب صلب را مورد بحث قرار دهیم.

شتاب خطی یکنواخت

در حالت شتاب‌گیری یکنواخت یک جسم صلب، معادله (۲.۳۸) صدق می‌کند؛ به‌طوری که شتاب a برای تمام ذرات، دارای بزرگی و جهت یکسانی است. با ارجاع به شکل ۲.۲۱، حاصل‌جمع برداری g و $-a$ (به روش متوازی‌الاضلاع)، جهت گرادیان فشار — یا همان جهتی که در آن فشار با بیشترین نرخ افزایش می‌یابد — را تعیین می‌کند. سطوح فشار ثابت باید بر این جهت عمود باشند؛ بنابراین، این سطوح با زاویه θ به سمت پایین متمایل می‌شوند، به‌گونه‌ای که:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_x}{g + a_z} \qquad (2.39)$$

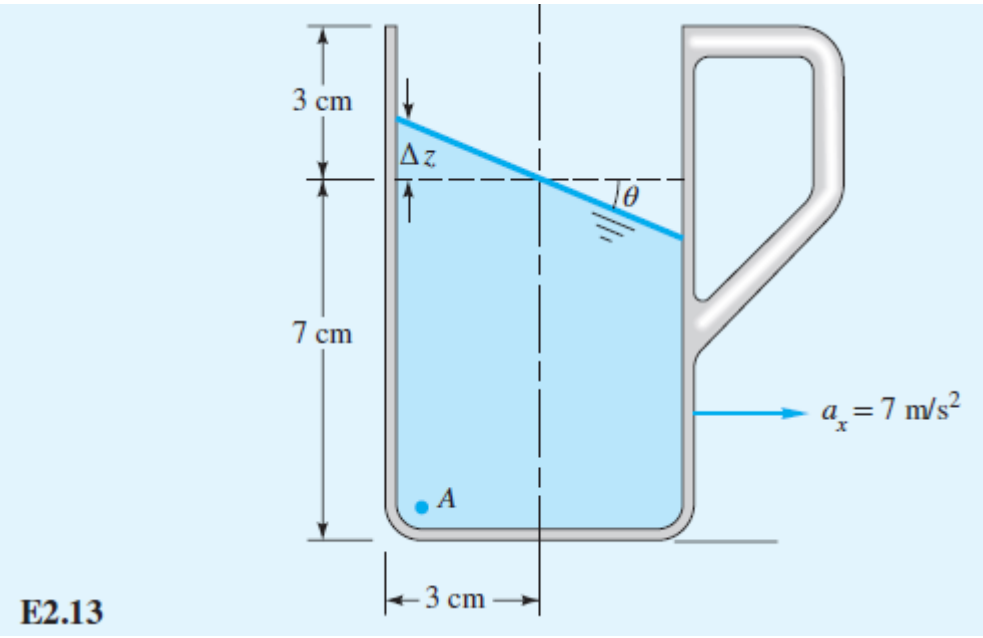
یکی از این خطوط کج‌شده، سطح آزاد است که با این الزام که سیال حجم خود را حفظ کند مگر اینکه بیرون بریزد، یافت می‌شود. نرخ افزایش فشار در جهت g-a بیشتر از هیدرواستاتیک معمولی است و با رابطه زیر داده می‌شود.

$$\frac{dp}{ds} = \rho G \quad \text{where } G = [a_x^2 + (g + a_z)^2]^{1/2} \qquad (2.40)$$

این نتایج مستقل از اندازه یا شکل ظرف هستند، مشروط بر اینکه سیال در سراسر ظرف به‌طور پیوسته به هم متصل باشد.

مثال ۲.۱۳

راننده یک خودروی مسابقه شتاب‌گیری (درگ)، در حالی که با شتاب ۷ متر بر مجذور ثانیه (m/s^2) شتاب می‌گیرد، لیوان قهوه خود را روی سینی‌ای افقی قرار داده است. این لیوان ۱۰ سانتی‌متر عمق و ۶ سانتی‌متر قطر دارد و در حالت سکون، حاوی قهوه‌ای به عمق ۷ سانتی‌متر است. (الف) با فرض اینکه قهوه به صورت یک جسم صلب شتاب می‌گیرد، تعیین کنید که آیا قهوه از لیوان بیرون می‌ریزد یا خیر. (ب) اگر چگالی قهوه ۱۰۱۰ کیلوگرم بر متر مکعب (kg/m^3) باشد، فشار پیمانه‌ای (گیج) را در گوشه، یعنی در نقطه A، محاسبه کنید.



- فرض‌ها: شتاب افقی جسم صلب، $$a_x = 7 \text{ m/s}^2$$. فنجان قهوه متقارن.
- مقادیر ویژگی‌ها: چگالی قهوه برابر با ۱۰۱۰ kg/m^3 داده شده است.

• رویکرد (الف): تعیین زاویه شیب با استفاده از شتاب معلوم، و سپس یافتن میزان افزایش ارتفاع.

• مراحل حل: طبق معادله (۲.۳۹)، زاویه شیب برابر است با θ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_x}{g} = \tan^{-1}\frac{7.0\ \text{m/s}^2}{9.81\ \text{m/s}^2} = 35.5^\circ$$

اگر لیوان متقارن باشد، سطحِ مایل از نقطه مرکزیِ وضعیتِ سکون عبور خواهد کرد، همان‌طور که در شکل E2.13 نشان داده شده است. در این حالت، سمتِ عقبِ سطحِ آزادِ قهوه به اندازه‌ی Δz بالا می‌رود که مقدار آن برابر است با Δz

$$\Delta z = (3\ \text{cm})(\tan 35.5^\circ) = 2.14\ \text{cm} < 3\ \text{cm} \quad \text{therefore no spilling} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

توضیح (الف): این راه‌حل پدیدهٔ تلاطم (sloshing) را در نظر نمی‌گیرد؛ پدیده‌ای که ممکن است در صورت ناهموار بودنِ (غیریکنواخت بودنِ) شروعِ حرکت رخ دهد.

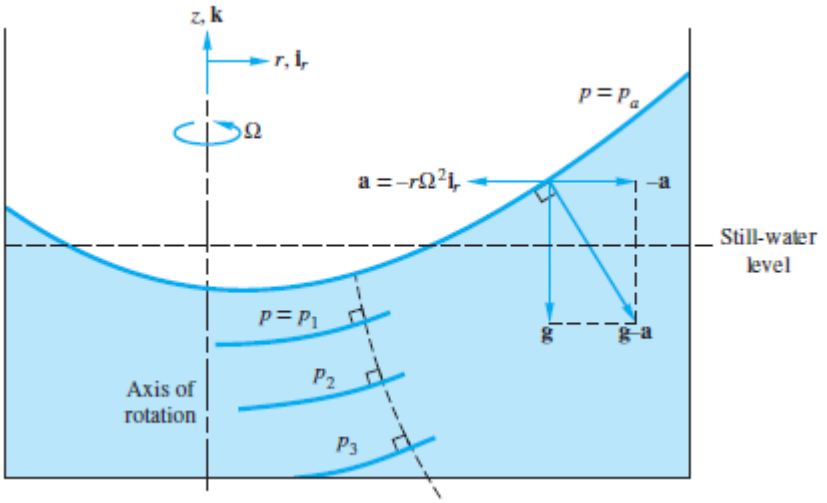
• رویکرد (ب): فشار در نقطهٔ A را می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۲.۴۰) و با به‌کارگیری فاصلهٔ عمودی Δs از سطح تا نقطهٔ A محاسبه کرد. در حالت سکون، داریم:

$$pA = \rho g h_{rest} = (1010\ \text{kg/m3})(9.81\ \text{m/s2})(0.07\ \text{m}) = 694\ \text{Pa}.$$

$$p_A = \rho G\,\Delta s = \left(1010\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left[\sqrt{(9.81)^2 + (7.0)^2}\right][(0.07 + 0.0214)\cos 35.5^\circ] \approx 906\ \text{Pa} \quad \textit{Ans. (b)}$$

تفسیر (ب): شتاب باعث افزایش ۳۱ درصدی فشار در نقطه A شده است. به این رویکرد جایگزین فکر کنید: چرا این روش کارآمد است؟ از آنجا که $a_z = 0$ است، می‌توانیم برای محاسبه p_A، در امتداد سمت چپ به صورت عمودی به سمت پایین حرکت کنیم.

$$p_A = \rho g(z_{surf} - z_A) = (1010\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(0.0214\ \text{m} + 0.07\ \text{m}) = 906\ \text{Pa}$$



شکل ۲.۲۲ تشکیل سطوح هم‌فشارِ سهمی‌گون در سیالی که تحت دوران به صورت جسم صلب قرار دارد. خط‌چینِ رسم‌شده در امتدادِ جهتِ بیشترین افزایشِ فشار، یک منحنی نمایی است.

دوران جسم صلب

به‌عنوان دومین حالت خاص، دوران سیال حول محور z را بدون هیچ‌گونه حرکت انتقالی در نظر بگیرید؛ همان‌طور که در شکل ۲.۲۲ ترسیم شده است. فرض می‌کنیم که ظرف به مدت کافی با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω چرخیده است، به‌طوری‌که سیال به حالت دوران جسم صلب رسیده باشد. در این صورت، شتاب سیال تنها شامل یک مؤلفه مرکزگرا خواهد بود. در دستگاه مختصاتِ نشان‌داده‌شده در شکل ۲.۲۲، بردار سرعت زاویه‌ای و بردار مکان به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{k}\Omega \quad \boldsymbol{r}_0 = \mathbf{i}_r r \tag{2.41}$$

سپس شتاب توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_0) = -r\Omega^2 \mathbf{i}_r \tag{2.42}$$

همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، معادله (۲.۳۸) برای تعادل نیرو به صورت زیر در می‌آید:

$$\nabla p = \mathbf{i}_r \frac{\partial p}{\partial r} + \mathbf{k}\frac{\partial p}{\partial z} = \rho(\mathbf{g} - \mathbf{a}) = \rho(-g\mathbf{k} + r\Omega^2 \mathbf{i}_r)$$

با برابر قرار دادن مؤلفه‌های مشابه، میدان فشار را از طریق حل دو معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه اول به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \Omega^2 \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\gamma \tag{2.43}$$

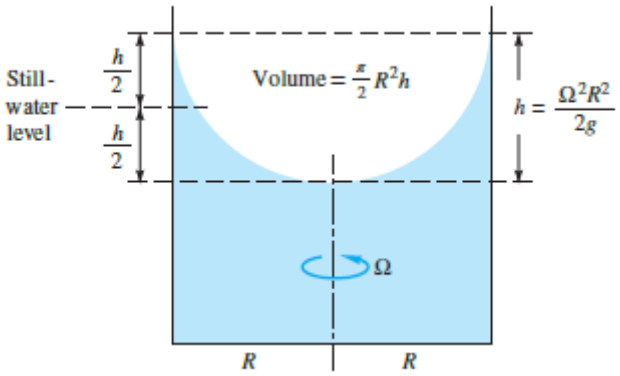
سمت راست (۲.۴۳) توابع شناخته شده‌ای از r و z هستند. می‌توان به صورت زیر عمل کرد: معادله اول را با ثابت نگه داشتن z نسبت به r به صورت «جزئی» انتگرال بگیرید. نتیجه به صورت زیر است:

$$p = \tfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2 + f(z) \qquad (2.44)$$

که در آن «ثابت» انتگرال‌گیری در واقع تابعی مانند $f(z)$ است. حال از این عبارت نسبت به z مشتق بگیرید و آن را با رابطهٔ دوم در (۲.۴۳) مقایسه کنید:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0 + f'(z) = -\gamma$$

دلیل این امر آن است که وقتی از f(z) نسبت به r مشتق می‌گیریم، حاصل برابر با صفر می‌شود. اگر متوجه این موضوع نمی‌شوید، باید مباحث حساب دیفرانسیل و انتگرال خود را مرور کنید.



شکل ۲.۲۳ تعیین موقعیت سطح آزاد برای دوران یک استوانه سیال حول محور مرکزی آن.

$$\text{or} \qquad f(z) = -\gamma z + C$$

که در آن C یک ثابت است. بنابراین، معادله (۲.۴۴) اکنون به این صورت درمی‌آید:

$$p = \text{const} - \gamma z + \tfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2$$

این توزیع فشار در سیال است. مقدار C با مشخص کردن فشار در یک نقطه یافت می‌شود. اگر p = p0 در (r, z) = (۰ ,۰)، آنگاه C = p0. توزیع مطلوب نهایی به صورت زیر است:

$$\boxed{p = p_0 - \gamma z + \tfrac{1}{2}\rho r^2\Omega^2} \qquad (2.46)$$

فشار نسبت به z خطی و نسبت به r سهموی است. اگر بخواهیم یک سطح با فشار ثابت، مثلاً p = p1، را رسم کنیم، معادله (۲.۴۵) به شکل زیر در می‌آید:

$$z = \frac{p_0 - p_1}{\gamma} + \frac{r^2\Omega^2}{2g} = a + br^2 \qquad (2.47)$$

بنابراین، سطوح حاصل، سهمی‌گون‌های دوار (paraboloids of revolution) هستند که رو به بالا گود شده‌اند و نقاط کمینه آن‌ها بر محور دوران منطبق است. چند نمونه از این حالت‌ها در شکل ۲.۲۲ ترسیم شده‌اند.

همانند مثال پیشین در مورد شتاب خطی، موقعیت سطح آزاد سیال با استفاده از اصل بقای حجم تعیین می‌شود. در مورد ظرفی غیردایره‌ای که محور دوران آن در مرکز قرار ندارد (مانند شکل ۲.۲۲)، محاسبات هندسی بسیار پیچیده و زمان‌بری مورد نیاز است، به‌طوری که حل تنها یک مسئله می‌تواند تمام آخر هفته شما را به خود اختصاص دهد. با این حال، برای استوانه‌ای که حول محور مرکزی خود می‌چرخد (مطابق شکل ۲.۲۳)، انجام محاسبات ساده است. از آنجا که حجم یک سهمی‌گون برابر با نصف حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است، سطح آبِ ساکن (در حالت سکون) دقیقاً در نیمه راهِ میان بالاترین و پایین‌ترین نقاط سطح آزاد قرار می‌گیرد. مرکز سطح سیال به اندازه $h/2 = \Omega^2R^2/(4g)$ پایین می‌رود و لبه‌های آن به همان مقدار بالا می‌آیند.

مثال ۲.۱۴

فنجان قهوه موجود در مثال ۲.۱۳ از روی خودروی مسابقه‌ای (درگ) برداشته شده، روی یک صفحه چرخان قرار می‌گیرد و حول محور مرکزی‌اش چرخانده می‌شود تا حالت «جسم صلب» (rigid-body mode) ایجاد گردد. (الف) سرعت زاویه‌ای را بیابید که باعث می‌شود قهوه دقیقاً به لبه فنجان برسد، و (ب) فشار پیمانه‌ای (gage pressure) در نقطه A را برای این وضعیت تعیین کنید.

راه حل

بخش (الف)

فنجان حاوی ۷ سانتی‌متر قهوه است. فاصله ۳ سانتی‌متر باقی‌مانده تا لبه باید برابر با فاصله h/2 در شکل ۲.۲۳ باشد. بنابراین

$$\frac{h}{2} = 0.03\ \text{m} = \frac{\Omega^2 R^2}{4g} = \frac{\Omega^2(0.03\ \text{m})^2}{4(9.81\ \text{m/s}^2)}$$

با حل آن، به دست می‌آوریم

$$\Omega^2 = 1308 \quad \text{or} \quad \Omega = 36.2\ \text{rad/s} = 345\ \text{r/min} \qquad \textit{Ans. (a)}$$

بخش (ب)

برای محاسبه فشار، مناسب است که مبدأ مختصات r و z را در پایین‌ترین نقطه فرورفتگیِ سطح آزاد قرار دهیم، همان‌طور که در شکل E2.14 نشان داده شده است. در اینجا فشار پیمانه‌ای $p_0 = 0$ است و نقطه A در مختصات $(r, z) = (3 \text{ cm}, -4 \text{ cm})$ قرار دارد. در این صورت، می‌توان معادله (۲.۴۶) را محاسبه کرد:

$$
\begin{aligned}
p_A &= 0 - (1010 \text{ kg/m}^3)(9.81 \text{ m/s}^2)(-0.04 \text{ m}) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(1010 \text{ kg/m}^3)(0.03 \text{ m})^2(1308 \text{ rad}^2/\text{s}^2) \\
&= 396 \text{ N/m}^2 + 594 \text{ N/m}^2 = 990 \text{ Pa} \qquad \textit{Ans. (b)}
\end{aligned}
$$

این مقدار حدود ۴۳ درصد بیشتر از فشار آب ساکن، یعنی pA = 694 Pa، است.

مثال ۲.۱۴

فنجان قهوه موجود در مثال ۲.۱۳ از روی خودروی مسابقه‌ای (درگ) برداشته شده، روی یک صفحه چرخان قرار می‌گیرد و حول محور مرکزی‌اش چرخانده می‌شود تا حالت «جسم صلب» (rigid-body mode) در آن ایجاد گردد. موارد زیر را بیابید: (الف) سرعت زاویه‌ای که باعث می‌شود سطح قهوه دقیقاً به لبه فنجان برسد، و (ب) فشار پیمانه‌ای (gage pressure) در نقطه A در این شرایط.

راه حل

بخش (الف)

فنجان حاوی ۷ سانتی‌متر قهوه است. فاصله ۳ سانتی‌متر باقی‌مانده تا لبه باید برابر با فاصله h/2 در شکل ۲.۲۳ باشد. بنابراین

$$
\frac{h}{2} = 0.03 \text{ m} = \frac{\Omega^2 R^2}{4g} = \frac{\Omega^2 (0.03 \text{ m})^2}{4(9.81 \text{ m/s}^2)}
$$

$$
\Omega^2 = 1308 \quad \text{or} \quad \Omega = 36.2 \text{ rad/s} = 345 \text{ r/min} \qquad \textit{Ans. (a)}
$$

با حل آن، به دست می‌آوریم

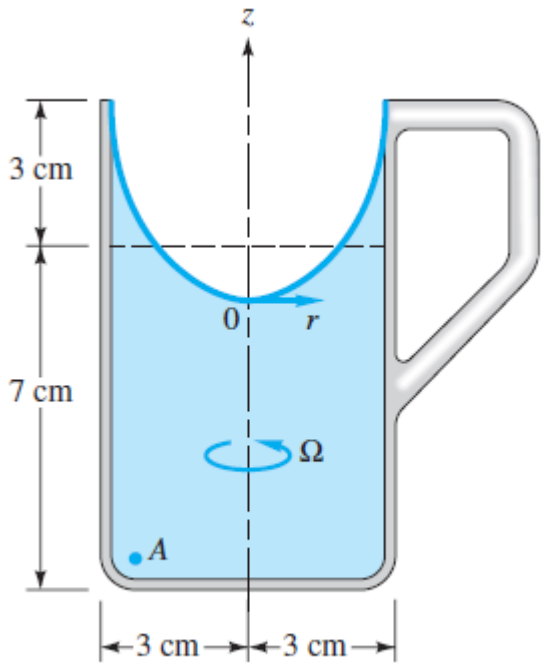
بخش (ب)

برای محاسبه فشار، مناسب است که مبدأ مختصات r و z را در پایین‌ترین نقطه فرورفتگیِ سطح آزاد قرار دهیم، همان‌طور که در شکل E2.14 نشان داده شده است. در اینجا فشار پیمانه‌ای $p_0 = 0$ است

و نقطه A در مختصات $(r, z) = (3 \text{ cm}, -4 \text{ cm})$ قرار دارد. در این صورت، می‌توان معادله (۲.۴۶) را محاسبه کرد:

$$
\begin{aligned}
p_A &= 0 - (1010\ \text{kg/m}^3)(9.81\ \text{m/s}^2)(-0.04\ \text{m}) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(1010\ \text{kg/m}^3)(0.03\ \text{m})^2(1308\ \text{rad}^2/\text{s}^2) \\
&= 396\ \text{N/m}^2 + 594\ \text{N/m}^2 = 990\ \text{Pa} \qquad \textit{Ans. (b)}
\end{aligned}
$$

این مقدار حدود ۴۳ درصد بیشتر از فشار آب ساکن، یعنی pA = 694 Pa، است.



E2.14

در اینجا، همانند حالت شتاب خطی، باید تأکید کرد که توزیع فشار سهمی‌گون (۲.۴۶) در هر سیالی که تحت دوران جسم صلب قرار دارد، فارغ از شکل یا اندازه ظرف، ایجاد می‌شود. ظرف حتی می‌تواند بسته و کاملاً از سیال پر شده باشد؛ تنها شرط لازم این است که سیال در سراسر ظرف به‌صورت پیوسته به یکدیگر متصل باشد. مثال زیر حالت خاصی را نشان می‌دهد که در آن می‌توان یک سطح آزاد فرضی را تصور کرد که تا بیرون از دیواره‌های ظرف امتداد می‌یابد.

مثال ۲.۱۵

یک لوله U-شکل به شعاع ۱۰ اینچ که تا ارتفاع ۳۰ اینچ حاوی جیوه است، حول مرکز خود با سرعت ۱۸۰ دور بر دقیقه (r/min) می‌چرخد تا زمانی که به حالت «جسم صلب» برسد. قطر لوله ناچیز است. فشار اتمسفر

برابر با ۲۱۱۶ پوند-نیرو بر فوت مربع (lbf/ft^2) می‌باشد. فشار در نقطه A را در حالت چرخش تعیین کنید. به شکل E2.15 مراجعه کنید.

حل

سرعت زاویه‌ای را به رادیان بر ثانیه تبدیل کنید:

$$\Omega = (180 \text{ r/min}) \frac{2\pi \text{ rad/r}}{60 \text{ s/min}} = 18.85 \text{ rad/s}$$

از جدول ۲.۱ برای جیوه داریم: $gamma = 846 \text{ lbf/ft}^3$ و در نتیجه $rho = 846/32.2 = 26.3 \text{ slugs/ft}^3$. در این سرعت چرخش بالا، سطح آزاد با زاویه‌ای بسیار تند (حدود ۸۴ درجه؛ این مقدار را با استفاده از معادله (۲.۴۷) بررسی کنید) به سمت بالا شیب پیدا می‌کند؛ اما از آنجا که لوله بسیار باریک است، سطح آزاد تقریباً در همان ارتفاع ۳۰ اینچی، یعنی نقطه B، باقی می‌ماند. با قرار دادن مبدأ مختصات در این ارتفاع، می‌توانیم مقدار ثابت C در معادله (۲.۴۵) را با استفاده از شرط $p_B = 2116 \text{ lbf/ft}^2$ در نقطه $(r, z) = (10 \text{ in}, 0)$ محاسبه کنیم:

$$p_B = 2116 \text{ lbf/ft}^2 = C - 0 + \tfrac{1}{2}(26.3 \text{ slugs/ft}^3)(\tfrac{10}{12} \text{ ft})^2(18.85 \text{ rad/s})^2$$

$$C = 2116 - 3245 = -1129 \text{ lbf/ft}^2$$

سپس با محاسبهٔ مقدار معادلهٔ (۲.۴۶) در نقطهٔ $(r, z) = (0, -30 \text{ in})$، مقدار pA را به دست می‌آوریم:

$$p_A = -1129 - (846 \text{ lbf/ft}^3)(-\tfrac{30}{12} \text{ ft}) = -1129 + 2115 = 986 \text{ lbf/ft}^2 \qquad \textit{Ans.}$$

این مقدار کمتر از فشار جو است؛ دلیل آن را می‌توان با دنبال کردن سهمی‌گونِ سطح آزاد از نقطه B و در امتداد خط‌چینِ نشان‌داده‌شده در شکل، دریافت. این مسیر از بخش افقی لوله U-شکل (که در آن فشار برابر با فشار جو است) عبور کرده و به سطحی پایین‌تر از نقطه A می‌رسد. طبق شکل ۲.۲۳، افتِ واقعی از نقطه B برابر خواهد بود با:

$$h = \frac{\Omega^2 R^2}{2g} = \frac{(18.85)^2(\frac{10}{12})^2}{2(32.2)} = 3.83 \text{ ft} = 46 \text{ in}$$

بنابراین pA حدود ۱۶ اینچ جیوه کمتر از فشار اتمسفر یا حدود (۸۴۶) ۱۲ / ۱۶= ۱۱۲۸ lbf/ft2 کمتر از $pa = 2116 \text{ lbf/ft2}$ است که با پاسخ بالا مطابقت دارد. وقتی لوله در حالت سکون است،

$$p_A = 2116 - 846(-\tfrac{30}{12}) = 4231 \text{ lbf/ft}^2$$

بنابراین، چرخش باعث کاهش ۷۷ درصدی فشار در نقطه A شده است. ادامه چرخش می‌تواند مقدار pA را به فشاری نزدیک به صفر برساند و پدیده کاویتاسیون (حباب‌زایی) رخ دهد.

یکی از نتایج جالب این تحلیل برای دوران جسم صلب آن است که خطوطی که در همه جا با گرادیان فشار موازی هستند، تشکیل‌دهنده‌ی خانواده‌ای از سطوح منحنی می‌باشند، همان‌طور که در شکل ۲.۲۲ ترسیم شده است. این خطوط در هر نقطه بر سطوحِ دارای فشار ثابت عمود هستند؛ از این رو، شیب آن‌ها برابر با منفیِ معکوسِ شیبی است که از معادله (۲.۴۷) محاسبه می‌شود:

$$\left.\frac{dz}{dr}\right|_{\mathrm{GL}} = -\frac{1}{(dz/dr)_{p=\mathrm{const}}} = -\frac{1}{r\Omega^2/g}$$

که در آن GL مخفف «خط گرادیان» (gradient line) است

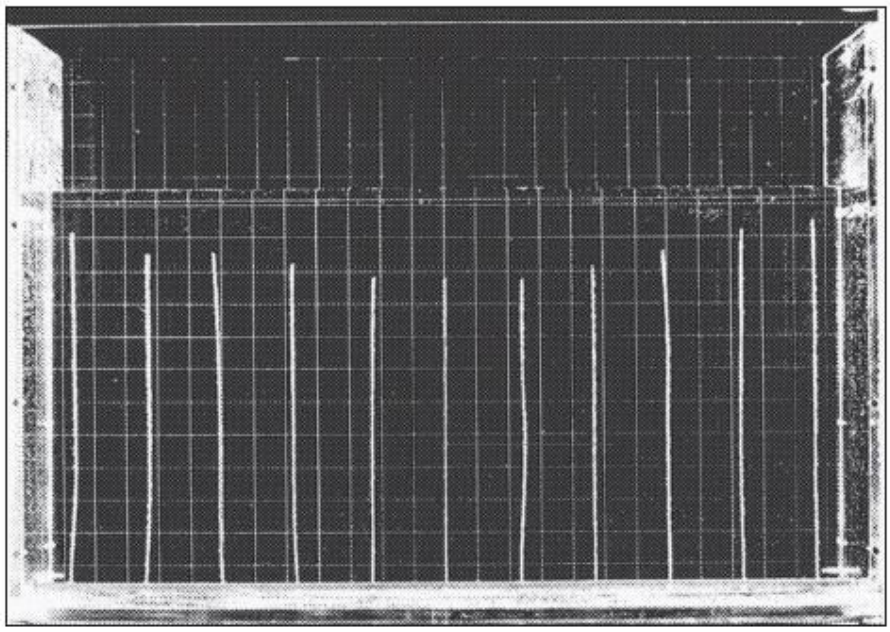
or

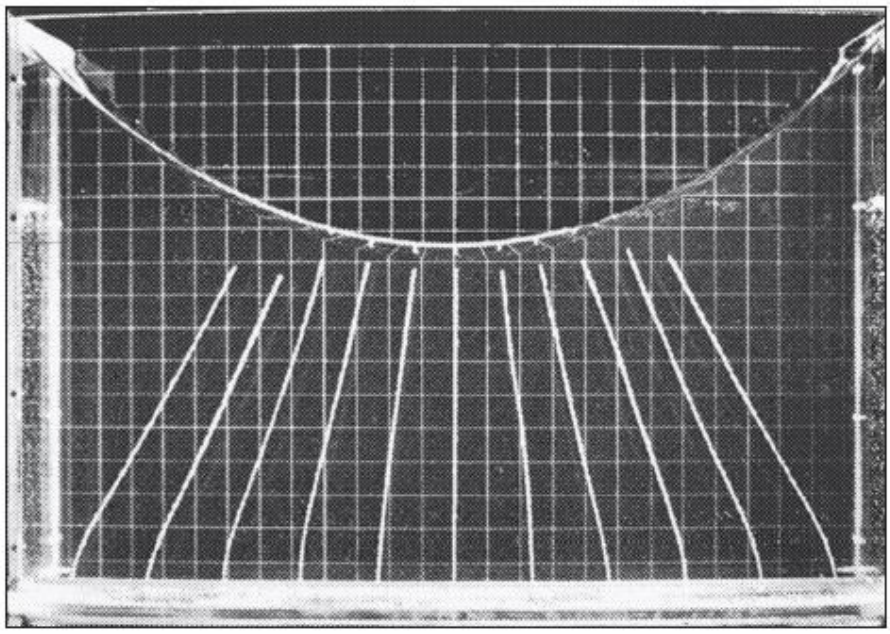
$$\frac{dz}{dr} = -\frac{g}{r\Omega^2} \qquad (2.48)$$

که در آن GL مخفف «خط گرادیان» (gradient line) است

$$r = C_1 \exp\left(-\frac{\Omega^2 z}{g}\right) \qquad (2.49)$$

توجه داشته باشید که این نتیجه و معادله (۲.۴۷) مستقل از چگالی سیال هستند. در غیاب اصطکاک و اثرات کوریولیس، معادله (۲.۴۹) خطوطی را تعریف می‌کند که میدان گرانشی خالصِ ظاهری در امتداد آن‌ها بر یک ذره اثر می‌گذارد. بسته به چگالی، یک ذره کوچک یا حباب تمایل دارد در درون سیال، در امتداد این خطوط نمایی بالا یا پایین برود؛ موضوعی که به صورت تجربی در مرجع ۵ نشان داده شده است. همچنین، رشته‌های شناور (buoyant streamers) خود را با این خطوط نمایی هم‌راستا می‌کنند و بدین ترتیب، از بروز هرگونه تنشی به‌جز کشش خالص اجتناب می‌ورزند. شکل ۲.۲۴ پیکربندی چنین رشته‌هایی را پیش از چرخش و در حین آن نشان می‌دهد.





شکل ۲.۲۴ نمایش تجربی میدان نیروی سیال در حالت چرخش جسم صلب، با استفاده از رشته‌های شناور: (بالا) سیال در حالت سکون (رشته‌ها به‌صورت عمودی رو به بالا قرار گرفته‌اند)؛ (پایین) چرخش جسم صلب (رشته‌ها در راستای جهتِ بیشینه گرادیان فشار هم‌راستا شده‌اند). (برگرفته از مقاله «میدان گرانش ظاهری در یک سامانه سیالِ در حال چرخش» اثر آر. ایان فلچر. نشریه *American Journal of Physics*، جلد ۴۰، صفحات ۹۵۹–۹۶۵، ژوئیه ۱۹۷۲)

۲.۱۰ اندازه‌گیری فشار

فشار یک کمیت مشتق‌شده است. این کمیت، نیروی وارد بر واحد سطح است که با برخورد مولکول‌های سیال به یک سطح مرتبط می‌باشد. از این رو، اکثر ابزارهای اندازه‌گیری فشار، مقدار فشار را تنها از طریق کالیبراسیون با یک دستگاه مرجع (اولیه) — نظیر تستر پیستونی وزنه‌ای (Deadweight Piston Tester) — تعیین می‌کنند. ابزارهای متنوعی برای این منظور وجود دارند که هم برای سیالات ساکن و هم برای جریان‌های متحرک کاربرد دارند. در متون تخصصی ابزاردقیق (منابع ۶ تا ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۴-۱۵)، بیش از ۲۰ نوع طراحی برای ابزارهای اندازه‌گیری فشار معرفی شده است. این ابزارها را می‌توان در چهار دسته کلی طبقه‌بندی کرد:

۱. مبتنی بر گرانش: فشارسنج جیوه‌ای (بارومتر)، مانومتر، تستر پیستونی وزنه‌ای.

۲. مبتنی بر تغییر شکل الاستیک: لوله بوردون (فلزی و کوارتزی)، دیافراگم، بیلوز (محفظه آکاردئونی)، کرنش‌سنج (Strain-gage)، جابجایی پرتو نوری.

۳. مبتنی بر رفتار گاز: تراکم گاز (گیج مک‌لئود)، هدایت حرارتی (گیج پیرانی)، برخورد مولکولی (گیج نادسن)، یونیزاسیون، رسانندگی گرمایی، پیستون گازی.

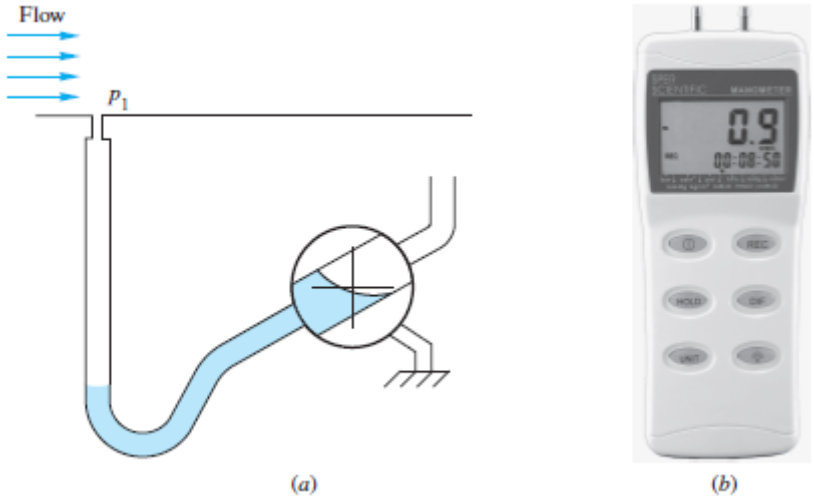
۴. دارای خروجی الکتریکی: مقاومتی (گیج سیمی بریجمن)، کرنش‌سنج‌های نفوذی (Diffused strain gage)، خازنی، پیزوالکتریک، پتانسیومتری، القای مغناطیسی، رلوکتانس (مقاومت) مغناطیسی، ترانسفورماتور تفاضلی متغیر خطی (LVDT)، فرکانس تشدید.

۵. پوشش‌های لومینسانس (تابان) برای اندازه‌گیری فشار سطحی [۱۳].

گیج‌های مبتنی بر رفتار گاز، عمدتاً ابزارهایی خاص‌منظوره هستند که در آزمایش‌های علمی ویژه‌ای به کار می‌روند. تستر پیستونی وزنه‌ای، پرکاربردترین ابزار برای انجام کالیبراسیون است؛ برای نمونه، «مؤسسه ملی استانداردها و فناوری» (NIST) در ایالات متحده از این دستگاه استفاده می‌کند. ساختار بارومتر در شکل ۲.۶ نشان داده شده است.

مانومتر که در بخش ۲.۴ به تحلیل آن پرداخته شد، دستگاهی ساده و کم‌هزینه است که بر اساس اصول هیدرواستاتیک عمل می‌کند و به جز ستون مایع، هیچ قطعه متحرک دیگری ندارد. اندازه‌گیری‌ها توسط مانومتر نباید موجب اختلال در جریان سیال شوند. بهترین روش برای دستیابی به این هدف، انجام اندازه‌گیری از طریق یک «سوراخ استاتیک» (Static hole) در دیواره‌ی مسیر جریان است، همان‌طور که در شکل ۲.۲۵a نشان داده شده است. این سوراخ باید عمود بر دیواره باشد و باید دقت شود که هیچ‌گونه پلیسه (Burr) یا زائده‌ای در لبه‌های آن باقی نماند. اگر سوراخ به اندازه کافی کوچک باشد (معمولاً با قطر ۱ میلی‌متر)، پس از

آنکه فشار به مقداری ثابت رسید، دیگر جریانی به درون لوله اندازه‌گیری برقرار نخواهد شد. بدین ترتیب، جریان تقریباً بدون تغییر باقی می‌ماند. با این حال، در صورتی که فشار جریان نوسانی باشد، ممکن است به دلیل پاسخ دینامیکی احتمالی لوله‌کشی، خطای بزرگی ایجاد شود. برای اندازه‌گیری فشارهای دینامیکی، از ابزارهای دیگری با ابعاد کوچک‌تر استفاده می‌شود. مانومتر نشان‌داده‌شده در شکل a۲.۲۵، فشار پیمانه‌ای (گیج) p_1$$ را اندازه‌گیری می‌کند. ابزار موجود در شکل b۲.۲۵ یک مانومتر تفاضلی دیجیتال است که می‌تواند اختلاف فشار بین دو نقطه مختلف در جریان را با دقت اعلام‌شده‌ی ۰.۳ درصدِ تمام‌مقیاس (full scale) اندازه‌گیری کند. امروزه حوزه ابزاردقیق به سرعت به سمت استفاده از نمایشگرهای دیجیتال پیش می‌رود.

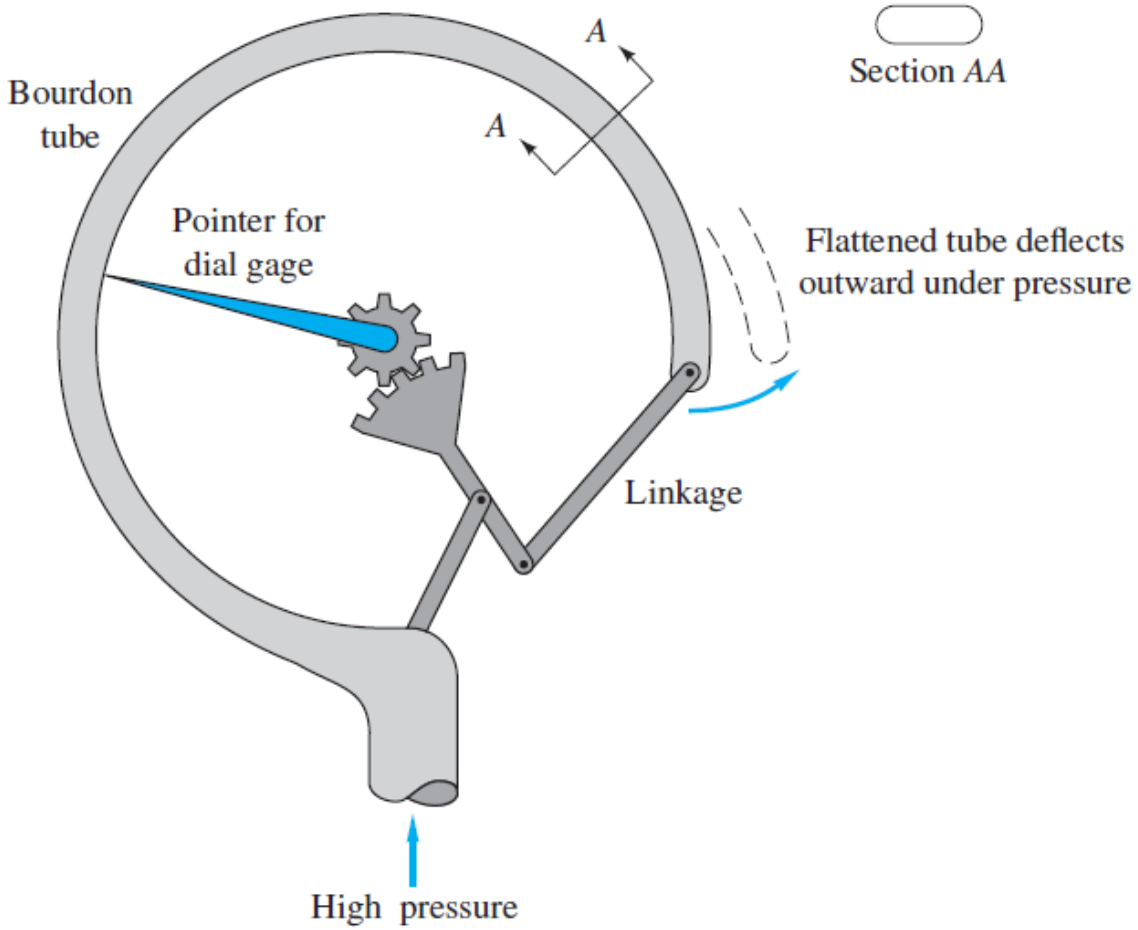


شکل ۲.۲۵ دو نوع فشارسنج (مانومتر) دقیق برای اندازه‌گیری‌های ظریف: (الف) لوله شیب‌دار مجهز به چشمی؛ (ب) فشارسنج دیجیتال با دقت اسمی ۰.۳± درصد. (با اجازه شرکت Sper Scientific)

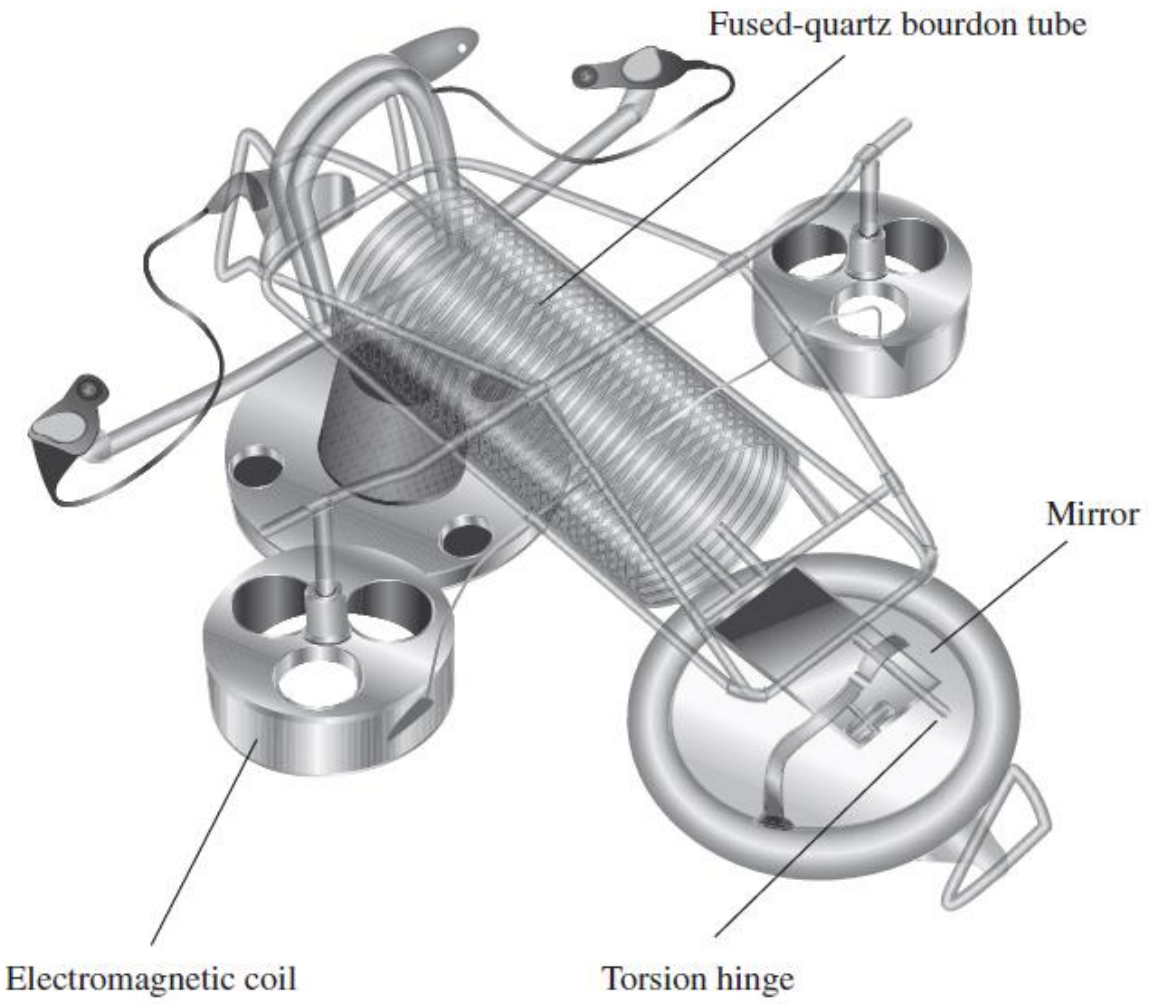
در دسته ۲، ابزارهای تغییر شکل الاستیک، یک وسیله محبوب، ارزان و قابل اعتماد، لوله بوردون است که در شکل ۲.۲۶ نشان داده شده است. هنگامی که یک لوله خمیده با سطح مقطع مسطح تحت فشار داخلی قرار می‌گیرد، به سمت بیرون منحرف می‌شود. این انحراف را می‌توان با یک رابط متصل به یک عقربه مدرج کالیبره شده، همانطور که نشان داده شده است، اندازه‌گیری کرد. یا می‌توان از این انحراف برای راه‌اندازی حسگرهای خروجی الکتریکی، مانند یک ترانسفورماتور متغیر، استفاده کرد. به طور مشابه، یک غشاء یا دیافراگم تحت فشار منحرف می‌شود و می‌تواند مستقیماً حس شود یا برای راه‌اندازی یک حسگر دیگر استفاده شود.

یک نوع جالب از شکل ۲.۲۶، لوله بوردون کوارتز ذوب شده با نیروی متعادل است که در شکل ۲.۲۷ نشان داده شده است، که انحراف لوله مارپیچی آن به صورت نوری حس می‌شود و توسط یک عنصر مغناطیسی که خروجی آن متناسب با فشار سیال است، به حالت مرجع صفر بازگردانده می‌شود. گزارش شده است که لوله

بوردونِ کوارتزِ جوش‌خورده و متعادل‌شده با نیرو، یکی از دقیق‌ترین حسگرهای فشاری است که تاکنون ساخته شده است، با عدم قطعیتی در حدود ±۰.۰۰۳ درصد.



شکل ۲.۲۶ طرح‌واره‌ای از یک ابزار لوله بوردون برای اندازه‌گیری مکانیکی فشارهای بالا.

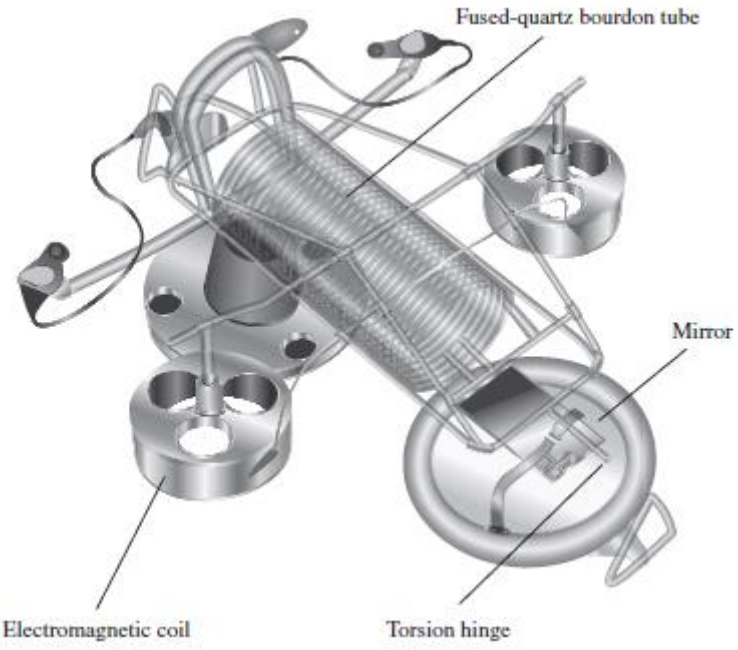


شکل ۲.۲۷ لوله بوردونِ ساخته‌شده از کوارتزِ گداخته (فیوزد کوارتز) با سیستم تعادل نیرو، دقیق‌ترین حسگر فشاری است که امروزه در کاربردهای تجاری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

گیج‌های کوارتز، چه نوع بوردون و چه نوع رزونانسی، گران هستند اما بسیار دقیق، پایدار و قابل اعتماد هستند [۱۲]. آنها اغلب برای اندازه‌گیری فشار در اعماق اقیانوس استفاده می‌شوند که امواج بلند و فعالیت سونامی را در دوره‌های زمانی طولانی تشخیص می‌دهند.

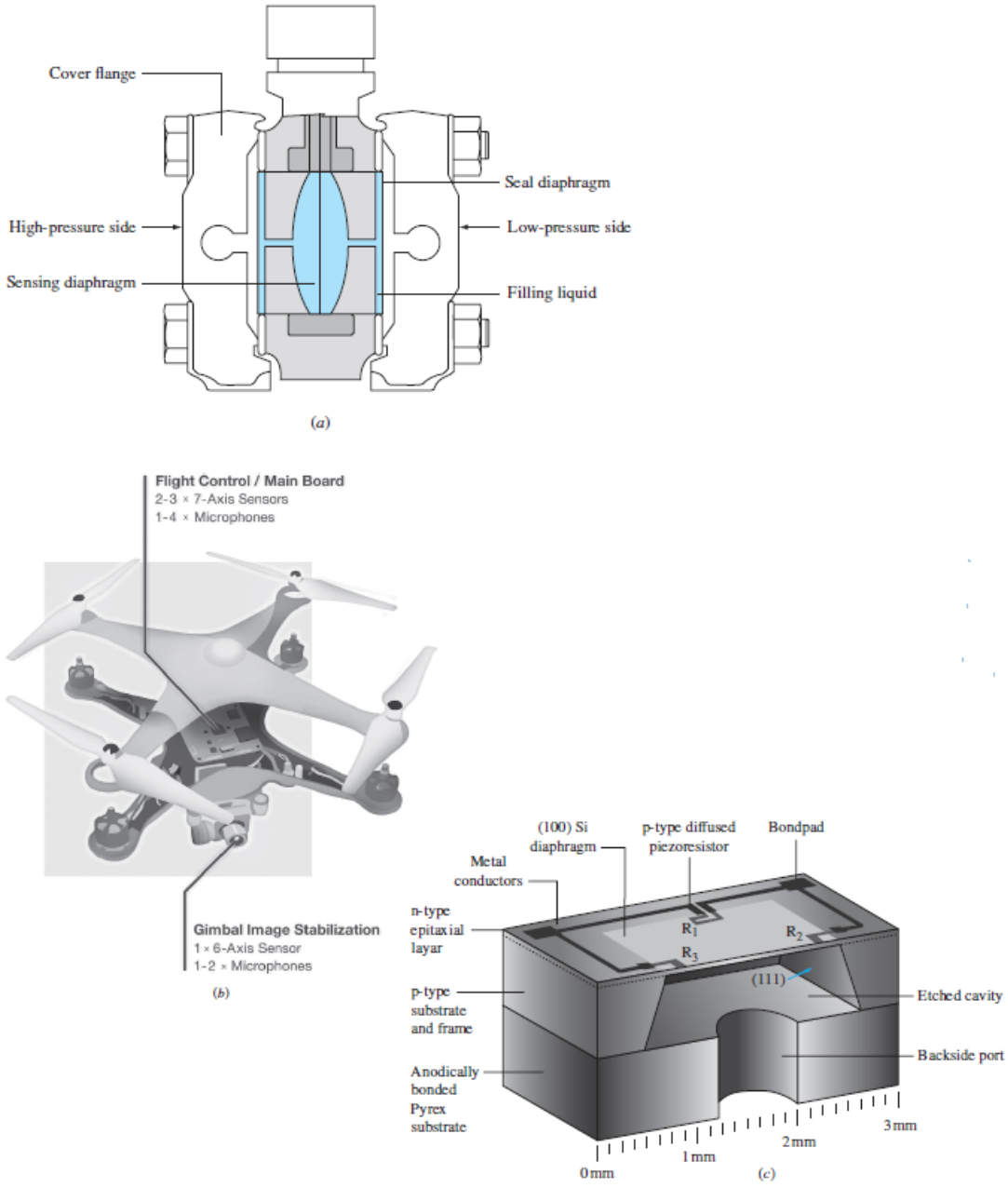
دسته آخر، حسگرهای خروجی الکتریکی، در مهندسی بسیار مهم هستند زیرا داده‌ها را می‌توان در رایانه‌ها ذخیره کرد و آزادانه دستکاری، ترسیم و تجزیه و تحلیل کرد. دو مثال در شکل ۲.۲۸ نشان داده شده است، اولین مورد حسگر خازنی در شکل a۲.۲۸ است. فشار تفاضلی دیافراگم سیلیکونی را منحرف می‌کند و ظرفیت مایع موجود در حفره را تغییر می‌دهد. توجه داشته باشید که حفره دارای درپوش‌های انتهایی کروی است تا از آسیب فشار بیش از حد جلوگیری شود. در نوع دوم، یک حسگر MEMS طوری تنظیم شده است که تحت فشار تغییر شکل دهد به طوری که فرکانس ارتعاش طبیعی آن متناسب با فشار باشد. یک نوسان‌ساز فرکانس

رزونانس عنصر را تحریک می‌کند و آن را به واحدهای فشار مناسب تبدیل می‌کند. شکل b۲.۲۸ یک وسیله نقلیه هوایی بدون سرنشین (UAV) خودران مجهز به حسگرهای فشار اینرسی و فشار بارومتریک ۷ محوره یکپارچه برای کنترل پرواز را نشان می‌دهد. شکل c۲.۲۸ عنصر سیلیکونی ریز میکروماشین‌کاری شده را شرح می‌دهد. نوع دیگری از حسگر خروجی الکتریکی دینامیکی، مبدل پیزوالکتریک است که در شکل ۲.۲۹ نشان داده شده است. عناصر حسگر، لایه‌های نازک کوارتز هستند که هنگام قرار گرفتن در معرض تنش، بار الکتریکی تولید می‌کنند. طرح موجود در شکل ۲.۲۹ روی یک سطح جامد نصب شده و می‌تواند فشارهای متغیر سریع، مانند امواج انفجار، را حس کند. طرح‌های دیگر از نوع حفره‌ای هستند. این نوع حسگر در درجه اول فشارهای گذرا را تشخیص می‌دهد، نه تنش پایدار، اما اگر عایق‌بندی بالایی داشته باشد، می‌تواند برای رویدادهای استاتیک کوتاه‌مدت نیز استفاده شود. همچنین توجه داشته باشید که این حسگر فشار گیج را اندازه‌گیری می‌کند - یعنی فقط تغییر از شرایط محیطی را تشخیص می‌دهد.

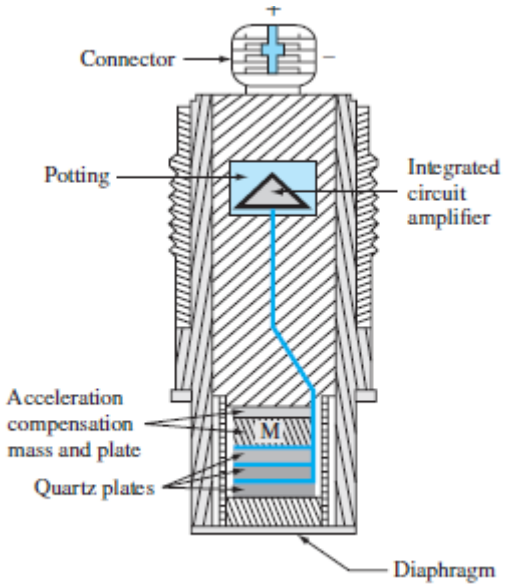


شکل ۲.۲۸ حسگرهای فشار با خروجی الکتریکی: (الف) یک دیافراگم سیلیکونی که تغییر شکل (انحراف) آن موجب تغییر ظرفیت خازنی حفره می‌شود؛ (ب) یک پهپاد مجهز به حسگرهای MEMS که در کنترل‌کننده‌های پرواز و سیستم تثبیت‌کننده تصویر (گیمبال) دوربین به کار می‌روند.

(با اجازه TDK InvenSense)؛ (ج) یک قطعه سیلیکونی ساخته‌شده با فناوری ریزماشین‌کاری (micromachining) که در فرکانسی متناسب با فشار اعمال‌شده، به تشدید (رزونانس) درمی‌آید.



شکل ۲.۲۸ حسگرهای فشار با خروجی الکتریکی: (الف) یک دیافراگم سیلیکونی که تغییر شکل (انحراف) آن موجب تغییر ظرفیت خازنی حفره می‌شود؛ (ب) یک پهپاد مجهز به حسگرهای MEMS که در کنترل‌کننده‌های پرواز و سامانه تثبیت‌کننده تصویر (گیمبال) دوربین به کار می‌روند. (با اجازه TDK InvenSense)؛ (ج) یک قطعه سیلیکونی ساخته‌شده با فناوری میکرومشین‌کاری که با فرکانسی متناسب با فشار اعمال‌شده، به ارتعاش درمی‌آید.



شکل ۲.۲۹ یک مبدل پیزوالکتریک، فشارهایی را که به‌سرعت تغییر می‌کنند، اندازه‌گیری می‌کند. منبع: شرکت PCB Piezotronics, Inc.، واقع در دیپو، نیویورک.

خلاصه

این فصل به‌طور کامل به محاسبه توزیع فشار و نیروها و گشتاورهای ناشی از آن در یک سیال ساکن یا سیالی با میدان سرعت معلوم اختصاص یافته است. تمامی مسائل هیدرواستاتیک (بخش‌های ۲.۳ تا ۲.۸) و مسائل مربوط به حرکت جسم صلب (بخش ۲.۹) به همین شیوه حل می‌شوند و نمونه‌هایی کلاسیک هستند که هر دانشجویی باید آن‌ها را درک کند. در جریان‌های لزجِ کلی، هم فشار و هم سرعت مجهول هستند و در فصل‌های بعدی، به‌عنوان یک دستگاه معادلات به‌صورت هم‌زمان حل می‌شوند.